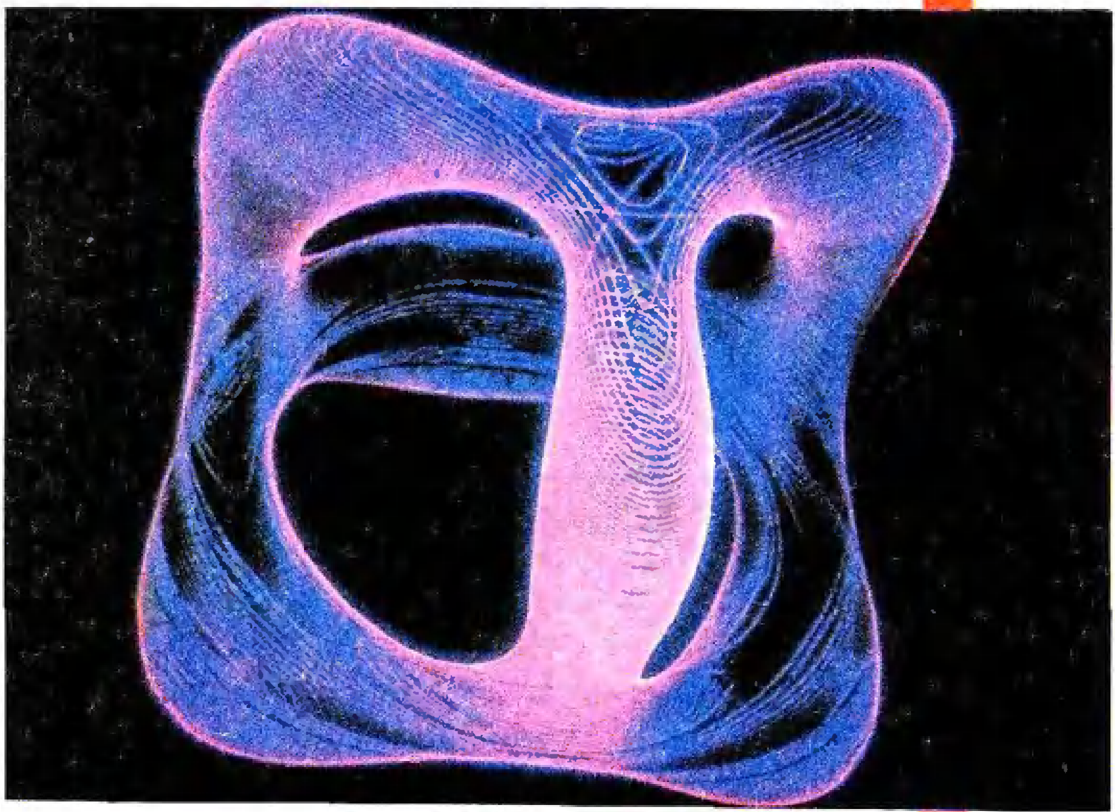
ISSN 0130-2221

Квант

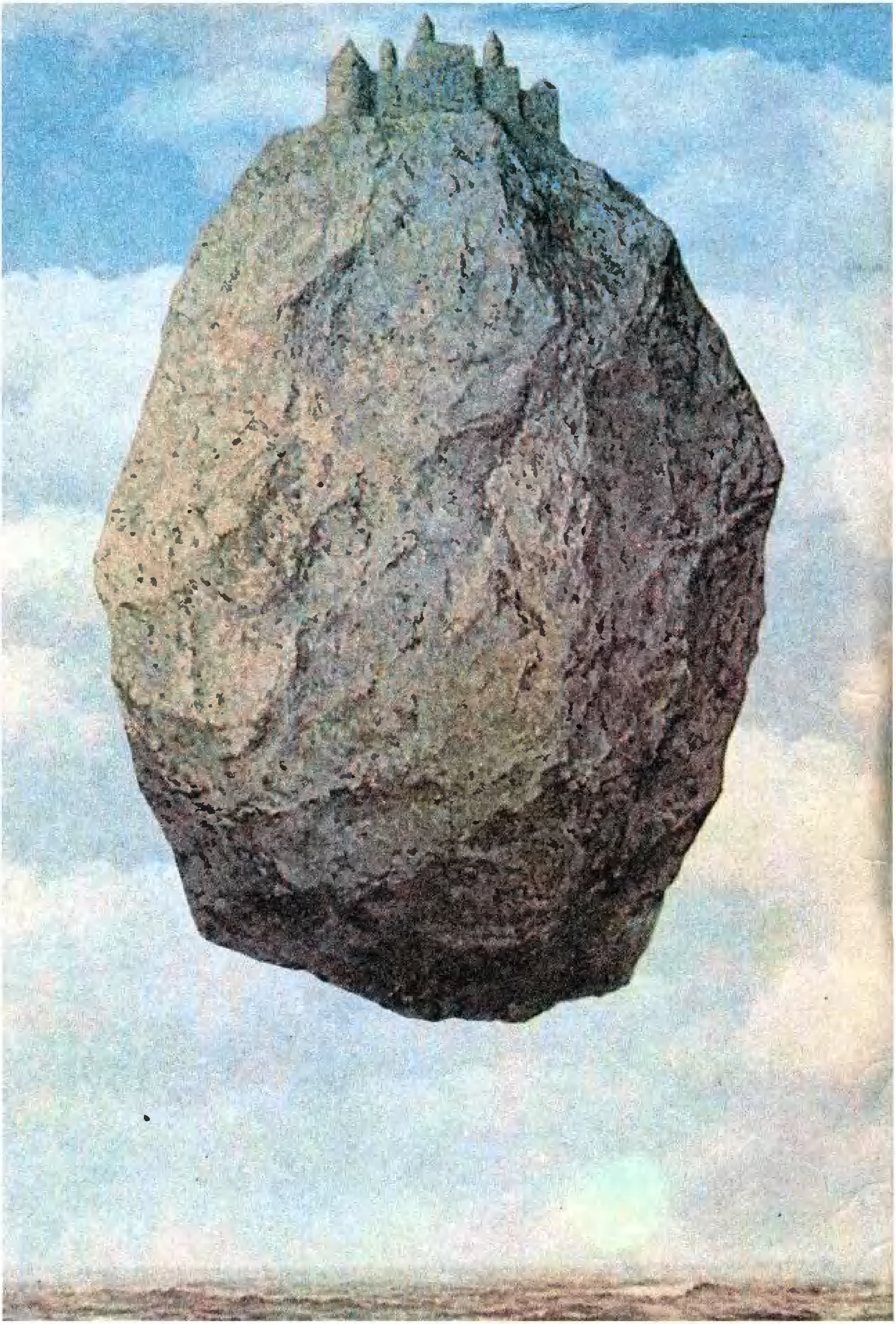
Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Почти тетраэдр

1992



Квант

11 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской Академии наук, Президиум Российской Академии образования и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

(к 200-летию со дня рождения)

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

23 февраля 1826 года на заседании физико-математического отделения Императорского Казанского университета был прочитан доклад под названием «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях». Эта дата рассматривается как день рождения неевклидовой геометрии и является гранью двух эпох. Предшествующие двадцать пять веков были эпохой создания классической геометрии. Принципы, лежащие в ее основе, и вместе с ними и вся геометрия считались незыблемыми, не допускающими никаких изменений. Но в этот февральский день родилась новая геометрия, неизмеримо расширившая человеческие представления о пространстве и форме, радикально изменившая устоявшиеся взгляды на всю математику и окружающий мир. Творцу этой новой геометрии было тогда 33 года. Его звали Николай Иванович Лобачевский.

О первых годах жизни Лобачевского известно очень немного. Родился он 1 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде в бедной семье. Отец его — коллежский регистратор Иван Максимович Лобачевский — был уездным землемером, мать — Прасковья Александровна — происходила из нижегородских мещан. В семье Лобачевских было три сына — Александр, Николай и Алексей. Семья рано лишилась кормильца. Точная дата смерти Ивана Максимовича неизвестна; судя по записям нижегородской Сретенской церкви, это случилось в 1801 году.

В ноябре 1802 года по ходатайству Прасковьи Александровны ее сыновья были приняты в первую Казанскую гимназию на казенное содержание. Жизнь гимназии того времени ярко описана в «Семейной хронике» знаменитым русским писателем С. Т. Аксаковым (в декабре 1800 года он был зачислен казеннокоштным воспитанником в ту же самую гимназию). Курс был четырехлетним. Кроме первоначальных и общих предметов, здесь преподавались языки — латинский, французский, немецкий и татарский; из философских наук — логика и практическая философия; из физико-математических наук — геометрия, тригонометрия, механика, гидравлика, физика, химия, натуральная история (геология), землеведение и гражданская архитектура; из юридических — практическое законоискусство; из военных — артиллерия, фортификация, тактика; и, наконец, искусства — рисование, музыка, фехтование и танцы. Усвоение этой программы требовало очень большого напряжения, редко кому удавалось с ней справиться. Большинство учащихся оставались в одном классе по два, иногда по три года.

Несмотря на трудную программу, учился Николай Лобачевский очень легко и хорошо. В гимназических ведомостях он аттестован «весьма прилежным и благонравным, занимающимся с особым прилежанием математикой и латинским языком».

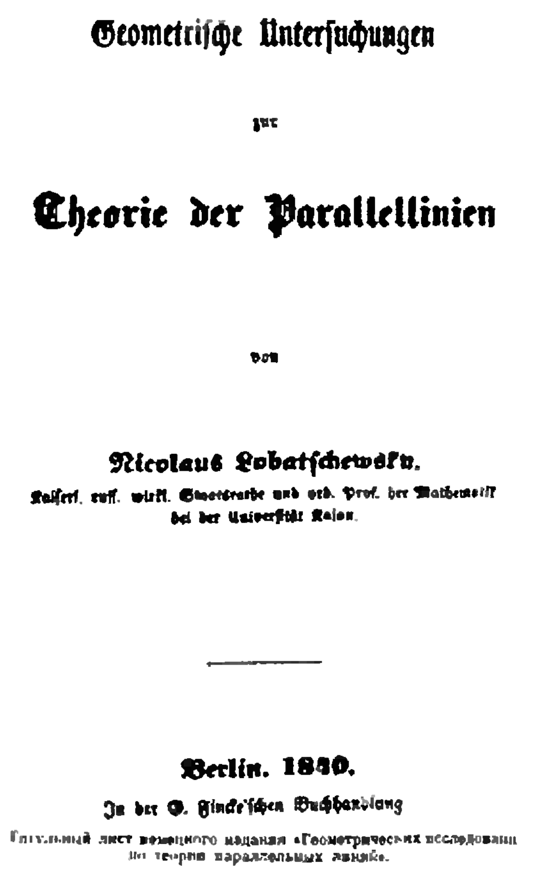
В январе 1807 года Николай Лобачевский окончил гимназию и поступил в Казанский университет, основанный в ноябре 1804 года высочайшим повелением императора Александра I. Устав вновь открытого университета не отличался от типового устава российских университетов того времени. Он был построен на основах широкой автономии: все должностные лица университета, начиная с преподавателя и кончая ректором, должны были избираться советом университета, университет имел свой суд и даже свою полицию; он не только пользовался правом бесцензурного печатания своих изданий, но его редакционный комитет служил органом, разрешавшим к печати все научные произведения, публиковавшиеся в Казани, кем бы они ни были написаны.

Первоначально университету было предоставлено здание, отстроенное для губернаторского дома, и один из корпусов гимназии. В первые три года занятия в университете велись силами преподавателей гимназии, а затем на работу в университет были приглашены профессора из-за границы. Разумеется, эти профессора не знали ни слова по-русски, так что преподавание велось на немецком и французском языках.

Портрет Н. И. Лобачевского работы художника Крюкова.

В 1808 году для преподавания математических наук в Казанский университет прибыл профессор Бартельс (Мартин Федорович, как его звали в России), сыгравший важную роль в математическом образовании Лобачевского. В свое время Бартельс был помощником учителя в школе, где учился великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс. Затем Бартельс учился и преподавал в Геттингенском университете, где вновь встретился с Гауссом и не прерывал с ним связи до конца жизни. Повидимому, Гаусс рекомендовал Бартельса секретарю Петербургской Академии наук Фуссу, который занимался подбором профессоров для вновь созданного университета. Бартельс был хорошо образованным ученым, прекрасным педагогом и чрезвычайно добросовестным человеком. Он был одним из немногих иностранных профессоров, вложивших в работу всю свою энергию, все внимание и всю любовь к делу. В Казани он пробыл двенадцать лет и положил начало казанской математической школе. Крупным математиком он не был, однако писал хорошие учебники и умел привить молодым людям тягу к научному творчеству.

Студенты университета изучали в то время следующие дисциплины: философию, историю, географию, всеобщую и российскую статистику, греческий и латинский языки, российскую словесность, высшую арифметику, алгебру, геометрию, конические сечения, дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления, аналитическую геометрию, механику, аэростатику, гидростатику, гидравлику, физику, химию, естественную историю, технологию, право. Во всех дисциплинах Лобачевский показывал отличные успехи. Но особенно углубленно он занимался математикой. В своем отчете попечите-



Geometrische Untersuchungen

zur

Theorie der Parallellinien

von

Nicolaus Lobatschewsky.

Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan.

Berlin. 1840.

In der G. Fincke'schen Buchhandlung

Титульный лист немецкого издания «Геометрических исследований по теории параллельных линий».

Титульный лист немецкого издания «Геометрических исследований по теории параллельных линий».

лю Казанского учебного округа профессор Бартельс писал: «Студенты Симонов и Лобачевский, особливо же последний, оказали столько успехов, что они даже во всяком европейском университете были бы отличными, и я льщусь надеждой, что если они продолжать будут упражняться в усовершенствовании своем, то займут значащие места в математическом кругу».

3 августа 1811 года Лобачевский окончил университет и был утвержден в звании магистра. По уставу университета магистры должны были, с одной стороны, готовиться к научной и профессорской деятельности, а с другой — быть помощниками профессоров. Одновременно с Лобачевским звания магистра был удостоен и его однокурсник И. М. Симонов. Это был человек, обладавший большими дарованиями, преимущественно занимавшийся астрономией. С этого времени они в течение свыше 35 лет вели в университете без видимых разногласий совместную работу, сменяя друг друга на кафедрах и административных должностях.

Математике оба молодых магистра учились у Бартельса. В качестве основных сочинений, над которыми должен был работать Лобачевский, Бартельс выбрал пятитомную «Небесную механику» Лагранжа и «Арифметические исследования» Гаусса. В 1813 году Лобачевский выполняет свою первую самостоятельную научную работу: находит разложение многочлена деления круга*)

$$P_n(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1$$

на неприводимые множители для некоторых значений показателя n.

26 марта 1814 года распоряжением министра народного просвещения Лобачевский был возведен в звание адъюнкта физико-математических наук (по современной терминологии — кандидата); таким образом, в возрасте 21 года Лобачевский официально становится преподавателем университета. Он ведет активнейшую преподавательскую работу, читает многочисленные курсы, поражающие широтой диапазона: элементарная математика, все без исключения разделы высшей математики, механика, опытная и теоретическая физика, теоретическая и наблюдательная астрономия. К началу двадцатых годов им написаны два учебника «Алгебра. Исчисление конечных» и «Геометрия» (опубликованные значительно позже), в рукописном виде распространявшиеся среди студентов. И все эти годы Лобачевский углубленно занимается теорией параллельных.

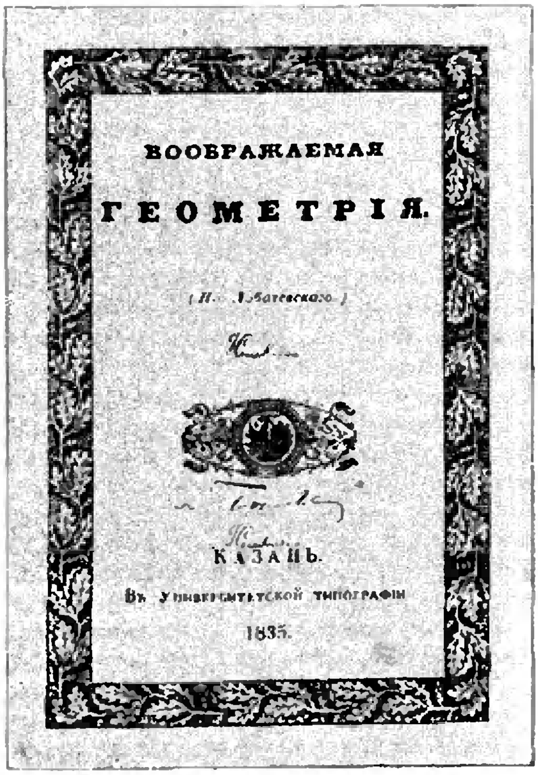
Проблема параллельных уходит своими корнями в античную Грецию. Проникновение геометрии из Междуречья и Египта в Грецию приве-

*) Об этом многочлене было рассказано в статье С. Гиндикина «Дебют Гаусса» («Квант», 1972, № 1).

ло к тому, что отрывочные, опытные, на глаз установленные факты здесь начинают превращаться в цепь связанных между собой предложений; каждое из них занимает в этой цепи определенное место и логически вытекает из предыдущих. Соответственно этому развитие геометрии шло в Греции в двух направлениях: во-первых, стремились логическими средствами найти возможно большее число геометрических истин; во-вторых, старались свести к возможному минимуму те геометрические факты, которые устанавливаются опытом. Огромную роль в формировании такого взгляда на геометрию сыграл великий греческий ученый Аристотель (384—322 г. до н. э.), создавший теорию дедукции, т. е. логического вывода. По схеме Аристотеля всякая дедуктивная наука должна начинаться установлением основных понятий, не подлежащих определению, и аксиом — основных истин, не подлежащих доказательству. Все остальное должно получаться строгим логическим выводом из этих исходных предпосылок. Применительно к геометрии этот замысел был в известной мере выполнен Евклидом (конец IV — начало III в. до н. э.), создавшим первый в истории свод геометрических знаний в 13 книгах — «Начала». Схема Аристотеля реализуется в «Началах» следующим образом. Первой книге предпосланы аксиомы и постулаты. Аксиомы, или, как называл их Евклид, общие достояния нашего ума,— это истины, относящиеся ко всяким величинам, не только геометрическим (например: две величины, порознь равные третьей, равны между собой; если к равным прибавить равные, то получим равные). Постулаты — это требования геометрического характера, которые нужно принять, чтобы на их основе делать все дальнейшие выводы. Этих постулатов у Евклида пять. Вот их оригинальные формулировки.

«Нужно потребовать:

I. *чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию;*


ВООБРАЖАЕМАЯ

ГЕОМЕТРІЯ.

(Н. Лобачевскаго)

КАЗАНЬ.

Въ Университетской типографіи

1835.

Титульный лист первого издания «Воображаемой геометрии».

II. *чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неограниченно;*

III. *чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;*

IV. *чтобы все прямые углы были равны между собой;*

V. *чтобы если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов оказалась меньше двух прямых, то эти прямые при достаточном их продолжении пересекались бы и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.*»

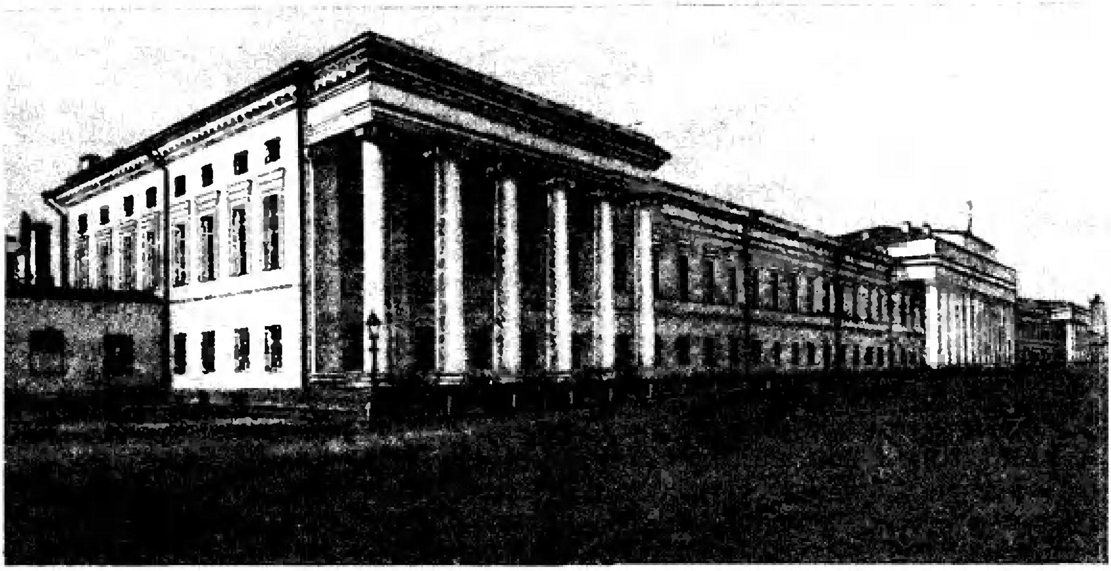
Необходимость последнего, пятого постулата для построения геометрии не кажется очевидной: сам Евклид доказывает целый ряд теорем, не опираясь на него, и совершенно неясно, почему в этот ряд не могут быть включены все теоремы евклидовой геометрии. Особая роль пятого постулата, его сложность и недостаточная наглядность привели к тому, что математики позднейших времен стали пытаться доказать его как теорему. Некоторые из них старались вывести этот постулат из остальных постулатов и аксиом Евклида, не добавляя к ним новых утверждений, другие же заменяли его иной аксиомой, которую они считали более простой и наглядной. Но анализ этих новых аксиом неизменно показывал, что при такой замене использовались утверждения, равносильные пятому постулату. Такими наиболее употребительными заменителями являются утверждения: «через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данной», «сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым» и т. д.

Многие попытки доказательства проводились методом доказательства от противного, т. е. предполагалось, что пятый постулат неверен, и из этого делался ряд выводов. Если бы при этом удалось прийти к противоречию, то пятый постулат был бы доказан. Наиболее далеко по этому пути продвинулись итальянский священник Джироламо Саккери (1667—1733) и швейцарский математик Иоган Генрих Ламберт (1728—1777). При этом было накоплено много фактов, которые имели бы место в геометрии, в которой верны все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельности, а последняя неверна. Особенно много удивительных теорем, которые были бы справедливы в такой геометрии, если бы она была возможна, получил Ламберт. Однако ни Саккери, ни Ламберт не допускали и мысли о том, что кроме геометрии Евклида возможна другая непротиворечивая геометрия. Все построения Саккери и Ламберта завершались тем, что явно или неявно использовалось утверждение, равносильное пятому постулату, в результате чего и обнаруживалось противоречие.

Лобачевский занялся исследованием той совокупности теорем, которая может быть выведена из системы аксиом, получаемой, если заменить аксиому параллельных евклидовой геометрии противоположным утверждением: *в плоскости через точку A, не принадлежащую прямой l, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с l.* Созданная таким образом геометрическая система носит теперь имя неевклидовой геометрии или геометрии Лобачевского.

Независимо от Лобачевского существование такой системы установили Карл Фридрих Гаусс и венгерский математик Янош Бойяи. Однако Гаусс, боясь быть непонятым, не пошел дальше первых шагов в этой геометрии и не опубликовал ни одной строчки о своем открытии. Бойяи опубликовал результаты своих исследований в 1832 году в виде приложения к обширному геометрическому трактату своего отца. Эта работа по достоинству считается одним из замечательных произведений мировой математической литературы, однако и в ней развиты лишь первые понятия новой геометрии. Стоит отметить, что к открытию неевклидовой геометрии был близок немецкий ученый Франц Адольф Тауринус. В 1826 году он даже опубликовал в Кельне небольшую брошюру, содержащую несколько теорем новой геометрии. К сожалению, изложены они были очень сжато и маловразумительно. Не встретив ни малейшего признания своих идей, Тауринус, по словам одного из своих современников, «впал в меланхолию»: в припадке болезни он сжег оставшиеся у него экземпляры брошюры и никогда более не возвращался к этому предмету.

Лобачевский впервые выступил с публичным изложением своей геометрии 23 февраля 1826 года. В этот день перед учеными физико-математического факультета стоял не просто уважаемый молодой профессор, а творец новой науки. Этот доклад был первым из серии докладов, сделанных им в том же 1826 году и опубликованных в первых номерах только что организованного научного журнала «Казанский вестник» в 1829 году



Казанский университет. Гравюра 30-х годов XIX века.

под общим названием «О началах геометрии». В этом сочинении содержалось не только полное изложение новой геометрии, но и многочисленные применения ее в математическом анализе.

С периодом активной разработки новой геометрии совпало еще одно важное для Лобачевского событие. В 1827 году он был выбран ректором Казанского университета, и с этого времени в жизни университета наступила цветущая пора. Были построены новые университетские здания, астрономическая обсерватория, создана превосходная библиотека, многочисленные лаборатории, значительно увеличилось число студентов. Лобачевский избирался ректором шесть раз подряд и находился на этой должности 13 лет. В годы своего управления университетом Лобачевский создал все свои научные труды. Если даже отвлечься от их значения, если только учесть, сколько труда нужно было затратить на их написание (изданное в конце сороковых годов собрание сочинений Лобачевского составляет пять увесистых томов), на выполнение вычислений, на подготовку их к печати, то этой научной деятельности с лихвой хватило бы для всякого ученого. Но, кроме того, все эти годы Лобачевский интенсивно вел преподавание по нескольким кафедрам, проявляя недюжинную эрудицию и педагогическое мастерство. Одной только этой деятельности было бы вполне достаточно для любого незаурядного профессора, а Лобачевский совмещал ее с титанической административной работой. Достаточно сказать, что, занимаясь постройкой новых университетских зданий, он досконально изучил архитектуру и участвовал в проектировании университетского городка. И всегда он оставался человеком, преданным университету, человеком безукоризненной честности, уважающим мнения других, действующим лишь силой убеждения.

Созданную им новую геометрию Лобачевский назвал «воображаемой», говоря, что если она не существует в природе, то во всяком случае существует в математическом анализе. Как уже отмечалось, почти в полном объеме она была представлена на суд ученых в обширной работе «О началах геометрии». Первая реакция на это сочинение появилась в 1834 году. В журнале «Сын отечества» № 47, издававшемся Н. Гречем и Ф. Булгариным, появился отзыв, подписанный литерами С. С. Доподлинно неизвестно, кто скрывался за этими литерами (по мнению крупнейшего знатока жизни и творчества Лобачевского профессора В. Ф. Кагана, это были петербургские математики С. Бурачек и С. Зеленый). И по существу, и по форме это был не отзыв, а грубый пасквиль, проникнутый неприкрытым издевательством. Это была не единственная отрицательная реакция. Даже такой крупный математик, как М. В. Остроградский, не скрывал насмешки, отзываясь о воображаемой геометрии.

Лобачевскому было суждено до дна испить горькую чашу непонимания и невежественной критики. Гениальное открытие Лобачевского было настолько революционным, что научная мысль была совершенно не подготовлена к его восприятию. Тяжелы были переживания ученого, на которого обрушилась столь несправедливая критика, но неизмеримо сильнее было его убеждение в правильности своих идей. Твердость духа и уверенность в грядущем торжестве его открытия составляли, пожалуй, наиболее характерную черту Лобачевского.

В тридцатые годы Лобачевский значительно развивает основы новой геометрии, изложенные в его первой работе. Появляются новые обширные труды «Воображаемая геометрия» (1835), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838). Однако, насколько можно судить, никто этих сочинений в то время не прочитал. В 1840 году Лобачевский пишет на немецком языке небольшую книгу, содержащую короткое и, возможно, наиболее доступное изложение своей геометрии: «Geometrische Untersuchurgen zur Theorie der Parallellinien» («Геометрические исследования по теории параллельных линий»). Она также получила неблагоприятный отзыв, но именно эта книга обратила на себя внимание Гаусса. Судя по всему, он был первым человеком, до конца осознавшим значение работ Лобачевского. Известно, что после прочтения «Исследований» шестидесятитрехлетний Гаусс два года изучал русский язык и освоил его в такой мере, что смог свободно прочесть остальные труды Лобачевского. Более того, по предложению Гаусса 23 ноября 1842 года Лобачевский был избран членом-корреспондентом Геттингенского королевского научного общества, уже тогда имевшего значение академии наук. Это было единственным научным признанием, которое Лобачевский получил при своей жизни. Однако в печати Гаусс о своем отношении к работам Лобачевского никогда не высказывался, так что диплом Геттингенского общества оставался лишь формальным знаком внимания. В письмах к своему другу Шумахеру Гаусс говорил о великом значении геометрии Лобачевского, но эта переписка была издана лишь в 60-х годах, после смерти Лобачевского, и только тогда на его работы обратили внимание математики Западной Европы.

В 1846 году сменилось руководство Казанским учебным округом, и Николай Иванович Лобачевский помимо своего желания был назначен помощником попечителя округа с увольнением от должностей профессора и ректора. По существу это была опала. Трудно сказать, чем было вызвано это назначение, но совершенно ясно, что прямой и самостоятельный Лобачевский оказался неугоден новым лицам в министерстве.

В конце своей жизни ему пришлось испытать массу огорчений, насмешек и несправедливостей. Силы угасали. С прекращением службы в университете значительно ухудшилось его материальное положение. Новый попечитель округа настоял, чтобы семья Лобачевского освободила казенную квартиру. Вскоре после этого заболел туберкулезом и скоропостижно умер его старший любимый сын Алексей. Лобачевский очень тяжело переживал эту утрату. И все же больной, подавленный грузом забот, ослепший — Лобачевский нашел силы подытожить результаты своих геометрических исследований в сочинении «Пангеометрия», которое он диктовал своим ученикам.

24 февраля 1856 года, ровно через тридцать лет после своего первоначального доклада по неевклидовой геометрии на физико-математическом факультете, Лобачевский скончался непризнанным и почти забытым. Только в середине шестидесятых годов, после опубликования переписки Гаусса, работы Лобачевского сделались известными, и его замечательные идеи получили первое признание. Выходят в свет переводы его сочинений на французский, немецкий и итальянский языки, появляются первые последователи. Остается проблема логической непротиворечивости новой геометрии — центральный вопрос, на котором было сосредоточено внимание Лобачевского в течение всей его жизни. Наконец, в 1868 году итальянский математик Э. Бельтрами (1835—1900) находит положительное решение и этого вопроса, построив поверхность вращения, реализующую геометрию Лобачевского. С этого момента новая геометрия становится неотъемлемой частью математики, ее идеи и методы находят применение в теории чисел, теории функций, теории дифференциальных уравнений, в математической физике.

На основе идей Лобачевского выросла вся современная геометрия, играющая ключевую роль как в математике, так и вообще в точном естествознании. Имя творца этой новой геометрической системы — великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского — по праву занимает одно из первых мест в истории мировой науки.

16 октября 1992 года на 75-м году жизни скончался замечательный ученый и блестящий популяризатор науки, доктор физико-математических наук, профессор ЯКОВ АБРАМОВИЧ СМОРОДИНСКИЙ.

Я. А. Смородинский был одним из инициаторов создания журнала «Квант», членом редакционной коллегии журнала со дня его основания, автором, редактором и рецензентом огромного числа книг и статей. Это был необыкновенно эрудированный, добрый, веселый и обаятельный человек. Таким мы и будем помнить Якова Абрамовича Смородинского.

Редакционная коллегия
Редакционный совет
Редакция журнала «Квант»

МИКРОЭЛЕКТРОНИКА ОБРЕТАЕТ ЗРЕНИЕ

Доктор физико-математических наук
Ю. НОСОВ

На очереди — видеоинформация

Знамение времени — компьютеризация. Микро-, мини-, просто, супер-, а теперь еще и персональные (знаменитые *PC*) компьютеры стали поистине надеждой и реальностью прорыва в интеллектуально-информационное общество будущего, которое видится «золотым веком» человечества (по крайней мере сейчас, пока этот век еще не настал). Однако что собственно все эти большие и малые ЭВМ вычисляют, какую такую информацию они «переваривают»? Если надо рассчитать траекторию космического корабля или мостовые фермы, спроектировать кузов автомобиля с наилучшей аэродинамикой, «увязать» между собой миллиарды цифр народнохозяйственного плана — здесь ЭВМ и «карты в руки». Управление производственными процессами, поиск необходимых справок, перебор и сопоставление разнообразных данных, анализ сложнейших химических реакций и многое многое другое в том же роде компьютеры делают быстрее, надежнее, лучше человека.

Но все это — помощь в работе. А в повседневной жизни, в быту, какую информацию обрабатывает наш поистине «персональный компьютер» — головной мозг? Ответ очевиден — только то, что мы видим, слышим, осязаем. Причем главным образом, более чем на 90 %, то, что видим — ведь и услышанное внутри нас преобразуется в зрительные образы. Иначе говоря, восприятие, распознавание, обработка изображений, картин, образов — вот основа основ нашего информационного общения с окружающим миром. Гармоничный альянс глаза с мозгом великолепно обеспечивают это общение. А в компьютер информация, как правило, вводится через клавиатуру или другим подобным способом, который иначе как убогим назвать трудно. Изощреннейший «электронный мозг» слеп — противоречие налицо. И пока не появятся электронные (точнее, микроэлектронные) сенсоры, электронное зрение в первую очередь,— действительно всеобъемлющая компьютеризация невозможна. Приборы, способные выполнить эту деликатную миссию,— так называемые полупроводниковые приборы с зарядовой связью (ПЗС) — появились не сегодня, и скорее всего не из этой статьи читатель впервые о них узнает.

Изобретены ПЗС в 1969 году американскими учеными В. Бойлом и Дж. Смитом, к 1980 году они — ПЗС — достигли физико-технической «зрелости», а наше время характерно тем, что ПЗС неудержимо ринулись в большую жизнь.

Два слова о предшественниках, о том, как осуществлялось (и осуществляется) в электронике восприятие изображений. Самые совершенные средства для этого предоставляет телевидение (рис. 1). Мы все — «потребители» ТВ и в качестве таковых имеем дело с его конечной, выходной частью. Для нас ТВ — это телевизионный приемник, телевизор. Однако есть еще и вход системы, ее начало, передатчик. Здесь происходит восприятие изображения, осуществляет это видикон — специфическая электронно-лучевая трубка. Через объектив изображение фокусируется на экран (или растр) видикона — стеклянное окно, изнутри покрытое пленкой фоточувствительного состава. Свет возбуждает в пленке свободные электроны, чем ярче тот или иной фрагмент наблюдаемой картины, тем сильнее заряжается соответствующий участок растра. Экспозиция длится 1/25 секунды — длительность одного ТВ-кадра — за это время изображение преобразуется в подобное ему распределение заряженности по площади растра. Теперь наступает очередь элект-

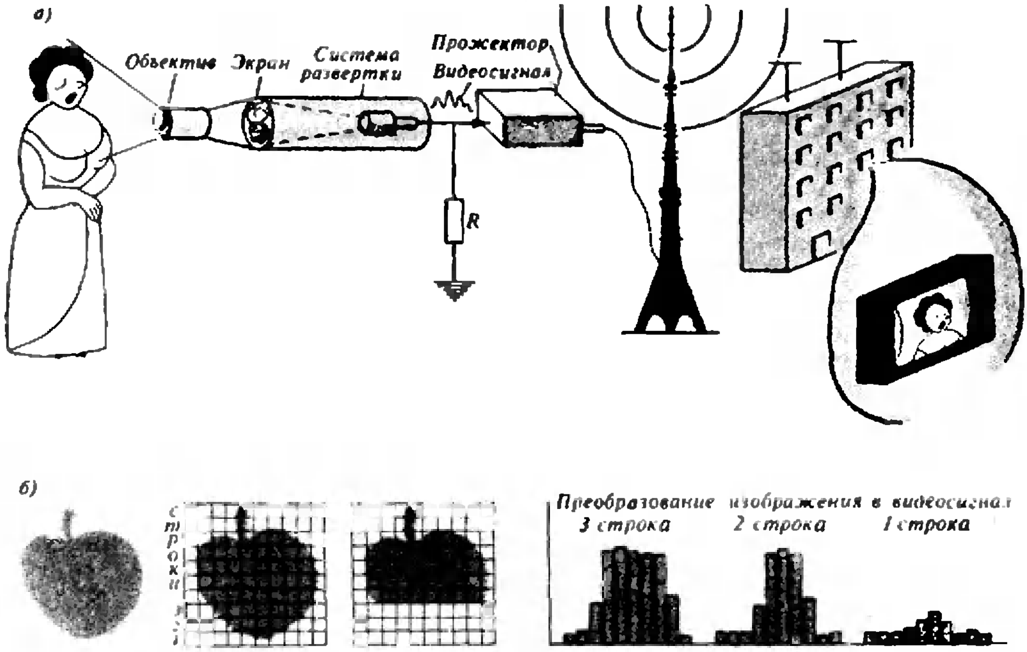


Рис. 1. Телевидение — это просто. а) Как певица из студии «попадает» на экран наших телевизоров. б) «Превращение» яблока в видеосигнал.

ронного луча, который, подчиняясь изменяющемуся напряжению развертки на отклоняющих пластинах, прочерчивает на экране строку за строкой, обегая в конечном счете весь светочувствительный растр. При этом луч «чувствует» степень заряженности участков экрана — на нагрузочном резисторе формируется соответствующий электрический сигнал, называемый видеосигналом. Тем самым замыкается такая цепочка преобразований: яркий фрагмент изображения→сильно заряженный участок растра→всплеск видеосигнала (аналогично и «темный фрагмент→...»). Характерно, что в результате процедуры считывания (ее также называют сканированием) двухмерная картина преобразуется в сигнал, «вытянутый» вдоль оси времени.

Дальнейшее (хотя это уже не по теме) выглядит так. Видеосигнал преобразуется в радиоволны, рассылаемые телебашней к нашим антеннам, а здесь все идет в обратном порядке: радиоволна → видеосигнал → →всплеск электронного луча кинескопа→свечение экрана телевизора. И если нет искажений и потерь, мы видим то же, что «видел» видикон.

Заметим, что описанный алгоритм восприятия изображений достаточно универсален — нечто подобное происходит и в «аппарате» человеческого зрения. Глазной «объектив» — хрусталик — фокусирует изображение на сетчатку, состоящую из десятков миллионов фоточувствительных рецепторов («растр»). Здесь световая энергия порождает биоэлектрические импульсы («видеосигнал»), которые по нервным волокнам поступают в кору головного мозга («компьютер» и «запоминающее устройство»). Число волокон значительно меньше числа рецепторов, следовательно, и принцип сканирования тоже как-то работает.

Начало прорыва

Пора, однако, переходить к теме. Внешне ПЗС прост (рис. 2, *а*) — это кремниевый кристалл, покрытый тончайшей диэлектрической пленкой диоксида кремния (SiO_2), на которую нанесены параллельные друг другу узкие алюминиевые полоски-электроды, подобные штакетнику в дачном заборе. Только поперечное соединение этих «штакетин» между собой чуть посложнее — через две на третью.

При воздействии на кристалл светового изображения (рис. 2, *б*) фотоны, поглощаясь в кремнии, порождают в нем свободные электроны (из расчета «один фотон→один электрон»), количество их тем больше, чем ярче и продолжительнее засветка. Чтобы не растерять образовавшиеся заряды, ко всем вторым электродам каждой тройки прикладывают положительное напряжение — электроны, разумеется, устремляются к плюсу источника питания, но на их пути глухой стеной встает диэлектрическая пленка SiO_2. Поэтому электроны скапливаются в приповерхностной зоне кристалла, образуя зарядовые «капли», или «пакеты», которые могут сохраняться достаточно долго.

Так световая картина преобразуется в эквивалентную ей картину распределения зарядовых пакетов по площади кристалла (рис. 2, *в*). Правда при этом плавное по координате изменение яркости превратилось в ступенчатое изменение амплитуд зарядовых пакетов, но при последующем воспроизведении изображения глаз сам осуществляет сглаживание. Надо только, чтобы «шаг дискретизации» был достаточно мал — здесь это фрагмент из трех электродов, называемый также элементарной ячейкой ПЗС или элементом разложения (имеется в виду картина). Чем больше их на кристалле и чем плотнее они размещены, тем выше разрешающая способность ПЗС, тем точнее передается воспринимаемое изображение.

Итак, первый акт ПЗС-представления — фаза экспозиции, накопления (или хранения) — благополучно завершился.

Интрига второго акта очевидна — надо выудить зарядовые пакеты из кристалла, попутно превратив их в электрические импульсы. Разумеется, нечего и думать о подключении порознь к каждой ячейке — паутина невообразимо перепутанных проводников, необходимых для этого, превзошла бы все «шедевры» театра абсурда. Но прелесть ПЗС в том и состоит, что в нем работает механизм внутреннего, «встроенного» самосканирования.

Вернемся к элементарной ячейке в момент окончания экспозиции (см. рис. 2, *б*). Если к электроду *3* приложить импульс напряжения считывания больший, чем напряжение хранения на электроде *2*, то зарядовый пакет перетечет в это новое более уютное место — здесь потенциальная яма глубже.

Это общий закон: рыба ищет, где глубже, человек — где лучше, а электрон — где его энергия минимальна. Если теперь потенциал с электрода *2* снять, а на электроде *3* уменьшить до напряжения хранения $U_{хр}$, то, как видим, картина оказывается полностью подобной первоначальной, но вся она на один электрод сдвинута вправо. Наигрывая эти несложные двухтактные рулады, можно зарядовые пакеты всей ПЗС-строки вытянуть на край кристалла. Здесь их поджидает $p - n$-переход (простейший диод), который, «проглатывая» очередную порцию зарядов, формирует на нагрузочном резисторе соответствующий импульс напряжения.

Вот и все — световая картина превратилась в распределение зарядов, которое в результате сканирования породило видеосигнал. Занавес.

Мы здесь рассмотрели простейшие линейные ПЗС, способные воспринимать узкую полоску, «вырезанную» из картинки. Чтобы охватить ее всю, надо ввести еще поперечное механическое сканирование, например, покачивая ПЗС (или картинку) туда-сюда. Более универсальны матричные ПЗС, у которых на кристалле изготовлена не одна, а большое количество строк, расположенных друг под другом. Каждый элемент такой матрицы задается двумя координатами: номером строки и номером в строке (или номером столбца). При использовании матричного ПЗС сканирование по обеим координатам осуществляется электронным способом. Матрица воспринимает изображение все целиком и сразу.

Число элементов в матрице обычно очень велико, и на то, чтобы их вытянуть через один выходной $p - n$-переход, требуется значительное время. В этот период экспозиция невозможна: вытекающие заряды перепутались бы с генерируемыми — поистине все бы «смешалось в доме Облонских». Чтобы «развязать» эти процессы, на кристалле выделяют две равные области (рис. 2, *г*): фоточувствительную (матрица накопления) и затененную (матрица считывания). После завершения экспозиции очередного кадра зарядовые

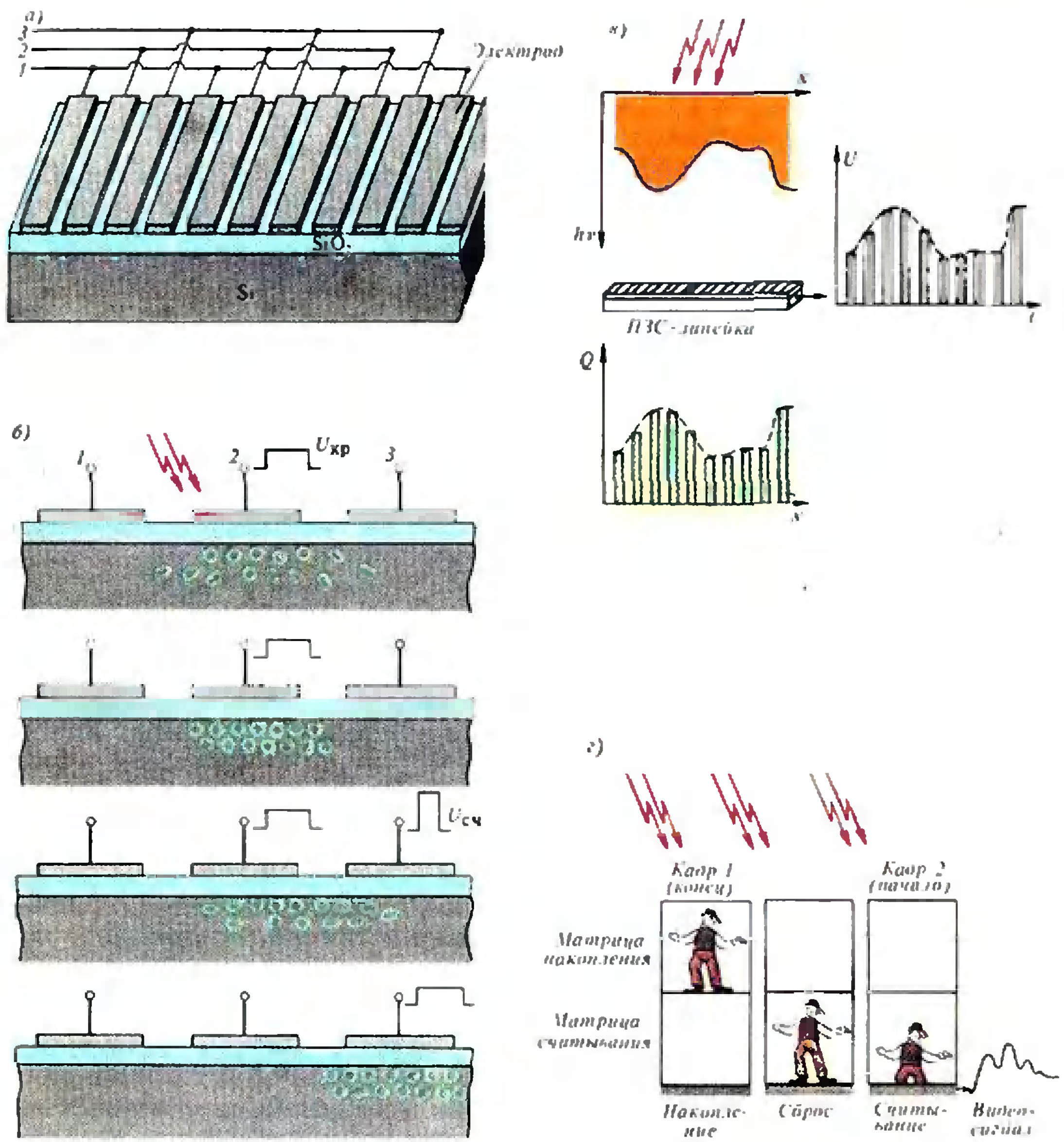


Рис. 2. Всё о ПЗС. а) ПЗС — это очень просто!! б) Фотонно-электронные игры в кристалле: «превращение» фотонов в электроны; локализация и перетекание электронов; электроны на новом месте. в) В ПЗС-линейке ниточка света (hν) преобразуется в цепочку зарядов (Q), которые вытекая образуют видеосигнал (U). г) Работа ПЗС-матрицы с кадровым переносом изображения.

пакеты из матрицы накопления вдоль по столбцам «сбрасываются» в матрицу считывания, причем очень быстро, за время менее 1/1000 с. В течение времени следующего кадра (1/25 с) каждая матрица занимается своим делом: фоточувствительная накапливает новую информацию, затененная — освобождается от предыдущего кадра, формируя видеосигнал.

Именно эта изюминка ПЗС и запатентована его изобретателями: «передача локализованного заряда с помощью манипуляции электрическими потенциалами». Каждый алюминиевый электрод и фрагмент структуры под ним представляет собой МДП-конденсатор («металл — диэлектрик — полупроводник»), а ПЗС-строка — цепочку таких конденсаторов с одной общей обкладкой. Когда-то, в начале 60-х годов, подобные цепочки делали с использованием транзисторов, вмонтированных между конденсаторами в качестве ключевых элементов. Их называли «пожарными цепочками» — при правильной манипуляции ключами заряд перетекает из ячейки в ячейку подобно тому, как ведро с водой, переходя из рук в руки, передается по людской цепочке на пожаре. Бойл и Смит максимально сблизили конденсаторы, и оказалось, что можно обойтись без специальных ключей. А вместе с упрощением пришло и новое качество — заряды стали перемещаться только внутри полупроводника, не вытекая в соединительные электроды.

Возможно, что именно эти скучноватые техницизмы сформировали логику открытия, а возможно и что-то еще. Когда представишь, как по воле человека в ПЗС вдоль поверхности кристалла с громадной скоростью (а она не меньше, чем у суперэкспресса на магнитной подвеске) мчат целеустремленно сотни тысяч электронных капель, то мгновенно останавливаясь, то меняя направление, когда представишь это — душу охватывает торжество сродни тому, которое рождают в ней первые такты бетховенской «Пятой...»

Через тернии — к звездам

Конечно, описанное — всего лишь схема. Разыграть ее под силу провинциальной любительской труппе, но получится ли при этом настоящий спектакль?

В упрощенном рассмотрении выпало из кадра множество неучтенных мешающих факторов, каждый из которых способен похоронить яркую идею ПЗС.

Однако оказалось, что простейшая схема очень пластична, мобильна, она дает необозримый простор для творчества. Со временем в ПЗС пришли свои — полупроводниковые — Чеховы, Станиславские, Шостаковичи, которые вдохнули в эту схему подлинную жизнь, а заодно ввели в пьесу побочные интриги, по-новому организовали мизансцены, подобрали аранжировку...

Вернемся к началу: «свет возбуждает в кристалле электроны». Но как? Ведь чуть ли не вся его поверхность отдана под алюминиевые электроды — на электронный глаз опущено немигающее металлическое веко. Есть, правда, узкие зазоры между электродами — первые ПЗС этими щелочками и довольствовались. Чувствительность, разумеется, была невысокой, к тому же улучшение «внутренних параметров» ПЗС требует сужения зазоров. Как быть? Перевернули структуру, стали светить сзади, где ничто не мешает — получилось неплохо. Только сначала пришлось кристалл превратить в тончайшую мембрану — иначе электроны гибнут, не добежав до противоположной поверхности. Конструкция стала сложной, малонадежной, дорогостоящей. К счастью, удалось найти альтернативу алюминию: поликремний — мелкодисперсный, поликристаллический кремний. Его несложно наносить в виде тонкой пленки, которая имеет высокую проводимость, но в отличие от алюминия — прозрачна. Проблема фоточувствительности решилась, ПЗС-глаз прозрел. Но проблема эта, увы, не единственная. Помните, образованные светом электроны вытягиваются электродами и локализуются на поверхности. Так вот, худшего места для хранения электронов не найти во всем кристалле. Кто не наслышан о чистоте и совершенстве кремниевых кристаллов, используемых в микроэлектронике? И это так, пока речь идет об объеме. Обеспечить идеальность структуры и на поверхности кристалла невозможно, а тут еще поверхность спечена со стеклообразным SiO_2. На границе двух разнородных материалов всегда образуются дефекты и механические напряжения, губительные для свободных электронов. Здесь электрон оказывается как в ловушке, превращаясь из подвижного в связанный — для ПЗС он потерян. Вот и получается, что электроны, рожденные в начале экспозиции, к моменту окончания ТВ-кадра уже успевают погибнуть, в результате чего зарядовые пакеты не достигают своих расчетных значений. Зарядовый рельеф оказывается не адекватным световому.

Еще хуже обстоит дело при сканировании. Свободные ловушки под каждым следующим электроном буквально обгладывают зарядовый пакет, подобно акулам, набрасывавшимся на «большую рыбу» хемингуэевского Старика. Но и это не все. Ловушки препятствуют движению — поверхностная подвижность электронов в несколько раз меньше объемной.

Конечно, количественное выражение этих неприятностей зависит от тщательности изготовления прибора. И там, где технологи сработали на совесть, потери заряда не превышают 1 % при пробегании цепочки из 100 электродов, а время единичного перескока пакета достигает одной десятимиллионной доли секунды. Прекрасный результат, но ненасытным «телевизионщикам» этого мало.

Что же делать, ведь достигнутое — это почти теоретический предел? «К счастью» — ах, сколько за этим легким (для литератора) способом решения проблем стоит нелегкого труда — к счастью, выход снова нашелся.

Введя специальное легирование приповерхностной зоны кристалла, научились так «деформировать» распределение электрического поля, что максимальное значение потенциала от поверхности смещается чуть-чуть в глубь кристалла. Именно здесь теперь оказывается дно потенциальной ямы, здесь локализуются зарядовые пакеты и вдоль этой плоскости они перемещаются. Поверхностное барахтание, всегда неэффективное, заменяется эластичным и быстрым подводным плаванием. Эти ПЗС со скрытым, или объемным, каналом (попросту, объемные ПЗС) дали выигрыш в уменьшении потерь переноса зарядов и в повышении скорости сканирования чуть ли не в 10 раз. ПЗС-телевидение стало реальностью.

И еще об одной проблеме. ПЗС появились в то время, когда телевидение повсеместно стало цветным, и терять это качество даже в «обмен» на твердотельность ТВ-передатчика никто бы не согласился. Цветоразличение — величайшее достижение самосовершенствования земной фауны, наиболее полно воплотившееся в ее венце — человеке. «Просто человек» различает 150—300 цветовых оттенков, художник — до 3000, наиболее полные цветовые атласы содержат их около 10 миллионов! Отнимите эту способность у человека, и он скатится по эволюционной лестнице на несколько ступеней вниз. Вот почему цветовосприятие и цветовоспроизведение — пробный камень совершенства каждого нового видеоинформационного прибора.

Общий принцип оперирования с цветными изображениями основан на разложении (в передатчике) и сложении (в приемнике) спектров. Он является логическим следствием того факта, что глазная сетчатка содержит три типа рецепторов, преимущественно чувствительных в красной (red, R), зеленой (green, G) и синей (blue, B) областях видимого спектра. В технике эти цвета образуют R — G — B-тройку основных цветов.

В первых цветных ПЗС-камерах входная призма из общего светового потока выделяла основные составляющие, каждая из которых направлялась на свою ПЗС-матрицу. Три полученных видеосигнала, пройдя ТВ-тракт, возбуждают на экране кинескопа R — G — B-триады и формируют цветное изображение.

Такая система обеспечивает высокое качество, но сложна, громоздка, фактически пригодна лишь для изготовления единичных образцов. С середины 80-х годов «зазвучала» технология пленочных цветокодирующих фильтров. На поверхность кремниевого кристалла наносятся разноцветные органические пленки, образующие мозаику чередующихся R — G — B-триад, совмещенных с ПЗС-ячейками. Таким образом, все устройство — это как бы вдвинутые друг в друга три ПЗС-матрицы, каждая из которых реагирует на один из основных цветов. Конечно, это требует утроения числа элементов разложения на кристалле и утроения скорости сканирования, т. е. очередных бессонных ночей технологов, но для нас — потребителей — это всего лишь «технические трудности», которые рано или поздно преодолеваются. Зато в итоге видится полностью интегральное, компактное, технологически совершенное, дешевое устройство, вырабатывающее трехцветный видеосигнал — с таким электронным глазом хоть в XXI век.

Так современные Гераклы одну за другой срубают головы бессмертной гидры нерешенных проблем, непреодолимых трудностей. И вот результаты.

Сегодняшний типичный ПЗС — это кремниевый кристалл площадью в 1/6 почтовой марки, содержащий 400—600 строк, а всего около 300 тысяч элементов разложения (в рекордных образцах это число доходит до нескольких миллионов). Потеря заряда при переносе пакета по цепочке из 500—1000 ячеек обычно менее 1 %, тактовая частота сканирования составляет 20—50 МГц. Пороговая фоточувствительность такова, что ПЗС в состоянии увидеть несколько десятков фотонов, упавших на одну элементарную ячейку (односекундная вспышка комнатной лампочки, удаленной от ПЗС на 10 км). «Микроэлектронные гены» в полной мере наделили ПЗС такими родовыми свойствами, как твердотельность, миниатюрность, долговечность, надежность, устойчивость к жестким механическим воздействиям. Приборы требуют низковольтного питания (до 30 В), потребляют малую мощность. Они технологичны, могут изготавливаться массовыми тиражами, и — потенциально — дешевы. При сравнении с видиконами количественные приобретения по каждой из этих характеристик могут составлять десятки, сотни, тысячи раз.

Но кроме того, ПЗС обладает и рядом принципиально новых качеств, вообще неведомых электронно-лучевым трубкам. Одна из его особенностей — жесткий геометрический растр: местоположение каждой ячейки однозначно определено номерами строки и столбца, вырабатываемый ею импульс также строго привязан к меткам времени. Поэтому при обработке видеосигнала нет опасения перепутать его элементарные составляющие или потерять часть их. ПЗС-растр не знает дисторсии — искажения изображений по краям. ПЗС-видеосигнал по самой своей природе удобен для цифрового представления. На одном кристалле с фоточувствительной матрицей могут быть размещены интегральные схемы управления и обработки видеосигналов, микропроцессоры, запоминающие устройства — кристалл станет не только «зрячим», но и «думающим» или хотя бы немного «соображающим».

Одним словом, ПЗС гармонично встраивается в идеологию компьютеризации, универсальность, плодотворность, всеобщность которой уже не требует доказательств. Назвать ПЗС микроэлектронным аналогом видикона, как это частенько делается в печати, значит принизить и обеднить это новое поколение приборов для восприятия и обработки изображений.

(Окончание следует)

Задачи

М1371—М1375, Ф1378—Ф1382

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 января 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1371» или «Ф1378». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1371—М1375 предлагались на Межреспубликанской математической олимпиаде 1992 года.

М1371. На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P' — точка пересечения отрезков AR и BQ. Докажите, что точки P и P' симметричны относительно прямой AB.

В. Произволов, Б. Кукушкин

М1372. Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого кубического многочлена $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$. Придумайте, как с помощью этого прибора решить систему

$$\begin{cases} x=P(y), \\ y=P(x). \end{cases}$$

Д. Туляков

М1373. Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B, причем радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проводится произвольная плоскость. Она пересекает окружность в точках X и Y. Докажите, что произведение $BX\cdot BY$ не зависит от выбора такой плоскости.

В. Чикин

М1374. Найдите все натуральные числа $k>1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и n, $m\neq n$, числа k^m+1 и k^n+1 получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

А. Скопенков

М1375. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом. Рассеянный кассир продал mn билетов, не следя за тем, чтобы они были проданы на разные места. Оказалось, что зрителей можно рассадить в зале так, чтобы у каждого в билете был правильно указан хотя бы один из номеров — ряда или места.

а) Докажите, что зрителей можно рассадить так, чтобы хотя бы у одного из них были правильно указаны оба номера, а для остальных выполнялось прежнее условие.

б) Какое наибольшее количество зрителей можно заведомо посадить на свои места с сохранением прежнего условия для остальных?

Е. Малинникова

Задачник „Кванта"

Ф1378. Тонкий длинный стержень движется с постоянной скоростью вдоль своей оси. Наблюдатель находится на большом расстоянии от оси. В тот момент, когда луч, направленный на середину стержня, составил угол α с направлением движения, видимая длина стержня оказалась равной его длине в состоянии покоя. С какой скоростью движется стержень?

И. Мартин

Ф1379. Шар массой M падает с высоты H без начальной скорости. В тот момент, когда он оказывается на высоте $H/2$, в него попадает горизонтально летящая пуля массой m, имевшая перед ударом скорость v_0, и застревает в шаре. Изменится ли в этом случае время падения шара? На какую высоту он подпрыгнет после абсолютно упругого удара о пол? Какое количество теплоты выделится в системе?

Р. Александров

Ф1380. Возьмем короткую трубочку небольшого диаметра d и выдуем мыльный пузырь радиусом $R \gg d$. Откроем теперь конец трубочки и подождем, пока пузырь сдуется. Оцените время жизни такого пузыря от начала сдувания, если $d = 2$ мм, $R = 2$ см. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma \approx 0{,}07$ Н/м.

В. Дроздов

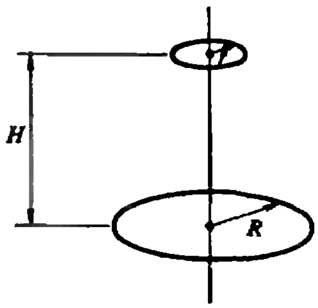


Рис. 1.

Ф1381*. Два кольца из тонкого провода расположены на одной оси на расстоянии H друг от друга (рис. 1). Радиусы колец r и R, причем $r \ll R$. По кольцам протекают токи I_1 и I_2. С какой силой одно из колец действует на другое?

Для решения задачи вам понадобится выражение для магнитной индукции на оси кольца с током:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+H^2)^{3/2}},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

А. Зильберман

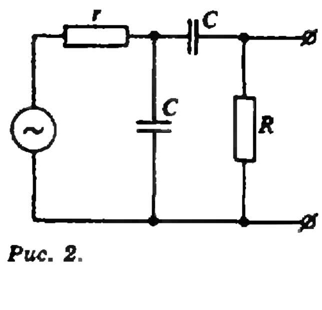


Рис. 2.

Ф1382. К генератору звуковой частоты подключена цепь из двух резисторов и двух конденсаторов (рис. 2). При какой частоте генератора сдвиг фаз между его напряжением и током через резистор сопротивлением R окажется равным нулю? Во сколько раз при этом напряжение на этом резисторе будет меньше выходного напряжения генератора?

З. Рафаилов

Задачник „Кванта"

Решения задач

М1341—М1343, М1345, Ф1358—Ф1362

М1341. Пусть m, n и k — натуральные числа, причем $m>n$. Какое из двух чисел больше —

а) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}$

или $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\ldots}}}$;

б) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}$

или $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots+\sqrt{m}}}}$

(в каждом числе — k знаков корня)?

Легко видеть, что

$$a_k=\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}>b_k=\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}},$$

а

$$c_k=\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots}}}>d_k=\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}}.$$

Докажем, что $b_k>c_k$, т. е. пункт б) задачи (отсюда, конечно, будет следовать и пункт а)).

Пусть $x_1=\sqrt{n}$, $x_{k+1}=\sqrt{n+x_k}$, $y_1=\sqrt{m}$, $y_{k+1}=\sqrt{m+y_k}$. Докажем неравенство $m+x_k>n+y_k$.

Для этого применим метод индукции. При $k=1$ неравенство очевидно. Пусть $m-n>y_k-x_k$. Тогда

$$y_{k+1}-x_{k+1}=\frac{m-n+y_k-x_k}{y_{k+1}+x_{k+1}}<\frac{2(m-n)}{y_{k+1}+x_{k+1}}<m-n,$$

что и требовалось.

В. Сендеров

М1342. Напишем строчку из n чисел от 1 до n. Под ней напишем вторую строчку из n чисел: сначала — числа, стоящие в первой строчке на нечетных местах (по порядку), а затем числа, стоящие на четных местах (тоже по порядку). Далее будем писать следующие строчки по тому же правилу до тех пор, пока на некотором шаге не получится m-я строчка, совпадающая с первоначальной. Докажите, что такая строчка встретится и $m\leqslant n$.

Удобнее вместо чисел от 1 до n рассматривать числа от 0 до $n-1$.

Пусть сначала n нечетно. По нашему правилу строчка из $n=2k+1$ чисел

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2k-1},\ a_{2k}$$

переходит в строчку

$$a_0,\ a_2,\ a_4,\ \ldots,\ a_{2k},\ a_1,\ a_3,\ a_5,\ \ldots,\ a_{2k-3},\ a_{2k-1}.$$

Проследим, как меняются номера чисел при обратном переходе. Строчка

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1},\ \ldots,\ b_{2k-1},\ b_{2k}$$

получается из строчки

$$\begin{array}{ccccccccc} b_0, & b_{k+1}, & b_1, & b_{k+2}, & b_2, \ldots, & b_{2k-1}, & b_{k-1}, & b_{2k}, & b_k \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 2k \end{array}$$

Мы видим, что при обратном переходе число b_i с номером i $(0\leqslant i\leqslant 2k)$ попадает на место с номером $2i$, если $i\leqslant k$, и $2i-(2k+1)$, если $k+1\leqslant i\leqslant 2k$ («номера мест» показаны выше красным цветом). Другими словами, номера преобразуются по правилу: номер места i переходит в остаток от деления $2i$ на $2k+1$.

Это можно записать короче так:

$$i\to 2i \bmod (2k+1).$$

Именно в этом месте проявляется удобство выбранной нами нумерации.

За t обратных переходов номер числа переходит в остаток от деления $2^t i$ на $2k+1$ (т. е. короче $i\to 2^t i \bmod (2k+1)$).

Остается воспользоваться такой арифметической леммой: если числа n и a взаимно просты, то найдется

0	1	2	3	4	5
0	2	4	1	3	5
0	4	3	2	1	5
0	3	1	4	2	5
0	1	2	3	4	5

0	1	2	3	4
0	2	4	1	3
0	4	3	2	1
0	3	1	4	2
0	1	2	3	4

$m<n$ такое, что a^m-1 делится на n (в нашем случае $a=2$).

Доказывается это *с помощью принципа Дирихле*. Если среди остатков от деления на n чисел $1=a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ нет 1, то, поскольку число разных остатков (от 0 до $n-1$) равно n, должны встретиться два одинаковых. Пусть $a^l\equiv a^{l+m} \pmod n$. Тогда $a^{l+m}-a^l=a^l(a^m-1)$ делится на m, а значит, (a^m-1) делится на n.

Выбрав, согласно лемме, $m<n$ так, что $2^m\equiv 1 \pmod n$, мы получим, что за m обратных переходов номер преобразуется по правилу $i\to 2^m i \pmod n$, или $i\to i \pmod m$, т. е. каждое число займет прежнее место.

Таким образом, в этом случае первоначальная строчка встретится менее чем через $n-1$ шагов.

Пусть теперь n — четно. По нашему правилу строчка из $n=2k+2$ чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$ переходит в строчку

$$a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2k}, a_1, a_3, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k+1},$$

т. е. a_{2k+1} (как и a_0) перемещается так же, как и для $n=2k+1$, тем самым задача сводится к уже рассмотренному случаю (сравните таблички на полях для $n=6$ и $n=5$). Таким образом, первоначальная строчка встретится не больше чем через $n-1$ *шагов.*

Я. Брискин, Н. Васильев

M1343. Три хорды окружности γ попарно пересекаются в точках A, B, C. Построим еще три окружности: одна касается сторон угла CAB и окружности γ (изнутри) в точке A_1, вторая — сторон угла ABC и окружности γ (изнутри) в точке B_1, третья — сторон угла ACB и окружности γ (изнутри) в точке C_1. Докажите, что три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 1).

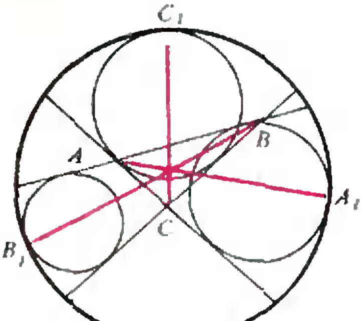


Рис. 1.

Пусть γ_0 — окружность, вписанная в треугольник ABC, I — ее центр, K — центр окружности γ, L — центр гомотетии H, переводящей окружность γ в γ_0 (точка K лежит на продолжении отрезка KI за точку I, причем отношение LI/KI равно отношению радиусов окружностей γ_0 и γ).

Докажем, что отрезок AA_1 (рис. 2) проходит через точку L (точно так же мы можем рассуждать и об отрезках BB_1 и CC_1).

Гомотетию H можно рассматривать как композицию двух гомотетий: первая из них H_1 с центром A_1 переводит γ в окружность γ_A, касающуюся окружности γ в точке A_1, вторая H_2 с центром A переводит γ_A в γ_0, при этом, конечно, $H=H_2\circ H_1$.

Тот факт, что точка L лежит на прямой (даже на отрезке) AA_1, вытекает из так называемой «теоремы о трех центрах подобия»: если H_1 и H_2 — две гомотетии с коэффициентами k_1 и k_2, $k_1k_2\neq 1$, то их композиция $H=H_2\circ H_1$ — тоже гомотетия с коэффициентом k_1k_2, причем центры всех трех гомотетий лежат на одной прямой.

Докажем это в интересующем нас случае, когда $0<k_1<1$ и $0<k_2<1$ (при этом центр гомотетии H будет лежать на отрезке, соединяющем центры гомотетий H_1 и H_2).

Возьмем три точки P, Q и X, не лежащие на одной прямой (рис. 3). Пусть $P_1=H(P)$, $Q_1=H(Q)$, $X_1=H(X)$. Треугольник $P_1Q_1X_1$ подобен треугольнику PQX, причем их сходственные стороны либо параллельны, либо лежат на одной прямой. Отсюда следует, что найдутся

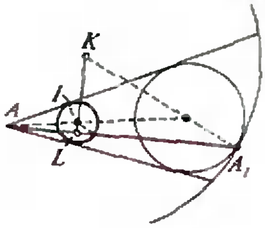


Рис. 2.

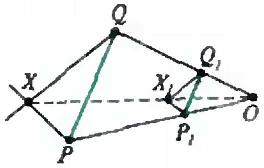


Рис. 3.

две стороны (пусть для определенности это будут PQ и P_1Q_1), лежащие на несовпадающих параллельных прямых.

Прямые PP_1 и QQ_1 пересекаются в некоторой точке O (поскольку $P_1Q_1=kPQ<PQ$), лежащей по ту же сторону от прямой PQ, что и точки P_1 и Q_1. Теперь ясно, что точки X и X_1 лежат на одной прямой, причем $OX_1/OX=$ $=k$, т. е. H — гомотетия с центром O и коэффициентом $k=k_1k_2$. Если O_1 — центр гомотетии H_1, а O_2 — центр гомотетии H_2, то $H(O)=H_2(O_1)$ лежит на отрезке O_1O_2($k_2<1$); это значит, что прямая O_1O_2 проходит через точку O, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от точки O на прямой O_1O_2 ($0<k_1<1$ и $0<k_2<1$). Отсюда следует, что точка O лежит на отрезке O_1O_2.

Утверждение задачи тем самым доказано — все три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через точку L.

Н. Васильев

М1345. На гиперболе $y=$ $=1/x$ взяты две точки $M(x_0;\ y_0)$ и $N(-x_0;\ -y_0)$, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M, проходящая через точку N, пересекает гиперболу еще в трех точках. Докажите, что эти точки лежат в вершинах правильного треугольника.

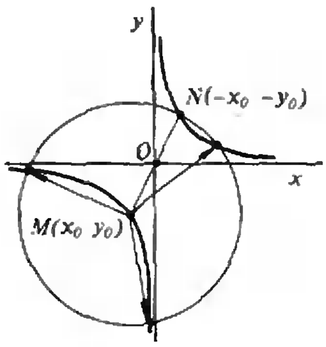
Для решения этой задачи нам понадобится следующая

Лемма. Пусть точки A, B, C лежат на окружности с центром M. Тогда треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда $\vec{OA}+\vec{OB}+$ $+\vec{OC}=3\vec{OM}$.

Доказательство. Из данного равенства сразу следует, что $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$, но это означает, что точка M совпадает с центром тяжести треугольника ABC, т. е. с точкой пересечения его медиан (убедитесь в этом). Таким образом, длины всех медиан треугольника ABC равны. Отсюда следует, что этот треугольник правильный. (Обратное утверждение очевидно.)

Теперь приступим к решению задачи. Пусть координаты точек A, B, C и M равны соответственно $(x_A;\ y_A)$, $(x_B;\ y_B)$, $(x_C;\ y_C)$ и $(x_M;\ y_M)$. По условию,

$$\begin{cases} xy=1, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=4(x_0^2+y_0^2). \end{cases}$$



Подставив $y=1/x$ из первого уравнения системы во второе, после несложных преобразований получаем уравнение для x:

$$x^4-2x_0x^3+\ldots=0.$$

Мы выписали только два старших члена, поскольку остальные слагаемые нас не интересуют. По теореме Виета сумма всех корней этого уравнения, включая корень $(-x_0)$, равна $2x_0$. Поэтому $x_A+x_B+x_C=3x_0$.
Аналогично $y_A+y_B+y_C=3y_0$.
Последние равенства означают, что

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=3\,\vec{OM},$$

где O — начало координат. Осталось воспользоваться доказанной нами леммой.

В. Сендеров

Задачник „Кванта"

Ф1358. При каких значениях коэффициента трения жесткая палочка длиной l с резиновыми наконечниками сможет удерживаться в горизонтальном положении под куполом радиусом R (рис. 1)?

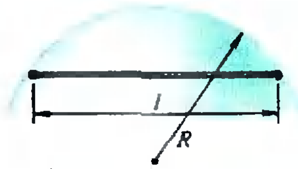


Рис. 1.

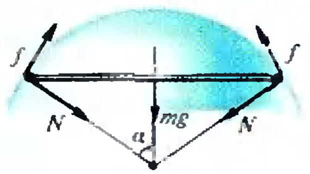


Рис. 2.

Обозначим силу нормальной реакции $\vec{N}$ — она направлена к центру купола, а силу трения обозначим f — чтобы найти верное направление этой силы, достаточно посмотреть, в какую сторону сместилась бы точка упора, если бы трение исчезло. Запишем условие равновесия палочки (рис. 2):

$$2N\cos\alpha - 2f\sin\alpha + mg = 0.$$

Если сначала прижать палочку посильнее, то N и f станут больше, а mg не изменится. Нас интересует минимально возможный коэффициент трения, поэтому будем считать, что мы прижали очень сильно, так что силой mg в этом случае можно просто пренебречь. Тогда

$$N\cos\alpha = f\sin\alpha \leqslant \mu N\sin\alpha,$$

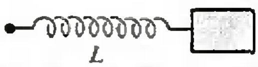
или

$$\mu \geqslant \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - l^2/4}}{l/2} = \sqrt{\frac{4R^2}{l^2} - 1}.$$

Собственно, ответ мы получили. Осталось несколько замечаний. Ясно, что если $l > 2R$, вставить палочку под купол мы не сможем. Если взять, наоборот, короткую палочку, то получатся большие — не имеющие смысла! — значения для μ. И еще — резина вещество со сложными свойствами, трение ее о твердую поверхность не совсем хорошо описывается законами сухого трения (впрочем, это уже тема другого разговора).

Д. Григорьев

Ф1359. На гладком горизонтальном столе расположен пружинный маятник — тяжелый груз на легкой пружине, длина которой в свободном состоянии $L=50$ см (см. рисунок). Из-за небольшого



вязкого трения о воздух колебания маятника медленно затухают — амплитуда уменьшается в 2 раза за 10 полных колебаний. Для поддержания амплитуды неизменной поступают следующим образом: свободный конец пружины быстро сдвигают на $l=1$ мм навстречу грузу в

Обозначим установившуюся амплитуду x_m, тогда сила, деформирующая пружину, при максимальной (и минимальной) длине равна

$$F = kx_m,$$

где k — жесткость пружины. Если перемещение конца $l \ll x_m$ (это еще нужно будет проверить!), то работа внешних сил равна

$$A = Fl = kx_m l.$$

Эта работа, совершаемая дважды за период, должна компенсировать потери энергии за тот же период:

$$2kx_m l = \alpha W = \alpha k x_m^2/2,$$

откуда

$$x_m = 4l/\alpha.$$

Теперь найдем α. За 10 периодов амплитуда падает в 2 раза, значит, энергия уменьшается в 4 раза. Следовательно,

$$(1-\alpha)^{10} = \frac{1}{4}, \quad \text{и} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

тот момент, когда длина пружины минимальна, и возвращают в прежнее положение, когда она максимальна. Определите установившуюся амплитуду таких колебаний.

Задачник „Кванта"

Итак,

$$x_m = \frac{4l}{1 - 1/\sqrt[5]{2}} \approx 0{,}031 \text{ м},$$

что действительно много больше $l = 1$ мм.

З. Рафаилов

Ф1360. *В цилиндрическом сосуде под тяжелым поршнем находится кислород (рис. 1). Поршень поднимают на высоту h от положения равновесия, дожидаются установления температуры, затем сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На каком расстоянии от прежнего положения равновесия установится поршень, когда система вновь придет в равновесие? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.*

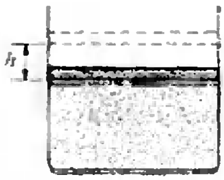


Рис. 1.

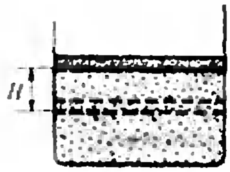


Рис. 2.

Запишем прежде всего условие равновесия поршня в начальном положении — на высоте H_1:

$$\frac{Mg}{S} SH_1 = \nu RT_1,$$

где M — масса поршня, S — его площадь, ν — число молей кислорода и T_1 — его начальная температура. А теперь — после того, как поршень остановится, опустившись на H (рис. 2):

$$Mg(H_1 + h - H) = \nu RT_2,$$

где T_2 — новая температура газа.

Из баланса энергий находим

$$MgH = \nu C_V(T_2 - T_1),$$

где $C_V = 5/2\ R$ — молярная теплоемкость кислорода при постоянном объеме.

После несложных преобразований получаем

$$\nu RT_2 - \nu RT_1 = Mg(H_1 + h - H) - MgH_1 =$$

$$= Mg(h - H) = \frac{R}{C_V} MgH,$$

откуда

$$H = \frac{h}{1 + R/C_V} = \frac{5}{7} h.$$

А. Зильберман

Ф1361. *Несколько заряженных проводников расположены вдали от других тел. Потенциал одного из них равен φ_1 и становится равным нулю после того, как заряды всех остальных тел изменяют на про-*

Для решения задачи мы воспользуемся принципом суперпозиции электрических полей. Вначале

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} + \sum_2^n \frac{q_i}{C_{ij}},$$

где C_{ij} — некоторые коэффициенты (так называемые взаимные емкости проводников). После того как заряды *тивоположные. Каким станет потенциал первого проводника, если его заряд увеличить теперь в 4 раза?*

Задачник „Кванта"

изменили на противоположные —

$$0=\frac{q_1}{C_1}-\sum_2^n\frac{q_i}{C_{1i}},$$

откуда

$$\sum_2^n\frac{q_i}{C_{1i}}=\frac{q_1}{C_1}.$$

Тогда искомый потенциал

$$\varphi_x=\frac{4q_1}{C_1}-\sum_2^n\frac{q_i}{C_{1i}}=\frac{3q_1}{C_1}=\frac{3}{2}\varphi_1.$$

Р. Александров

Ф1362. Виток в форме квадрата ABCD, сделанный из тонкого провода, имеет индуктивность L_1. Виток более сложной формы $ABCC_1B_1A_1A$ (рис. 1) из того же провода имеет индуктивность L_2. Чему равна индуктивность еще более сложного витка $ABB_1C_1D_1DA$? $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — это куб.

Полный магнитный поток через сложный контур рассчитать «в лоб» затруднительно. Однако можно этот контур представить в виде наложенных друг на друга простых контуров: если все токи одинаковы и направлены так, как показано на рисунке 2, то в части ребер куба они скомпенсируются и останется только нужный нам «угловатый» ток.

Осталось получить формулы для потоков, создаваемых таким «контурным» током через свой контур и через соседний. Свой поток Φ_1 выражается сразу:

$$\Phi_1=L_1I.$$

Для нахождения соседнего потока Φ_{21} рассмотрим рисунок 3 и заметим, что

$$L_2=\frac{2\Phi_1-2\Phi_{21}}{I}$$

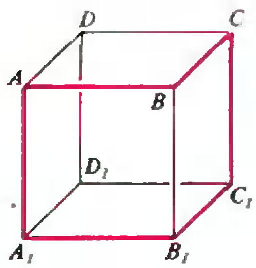


Рис. 1.

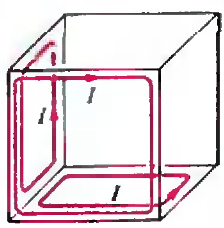


Рис. 2.

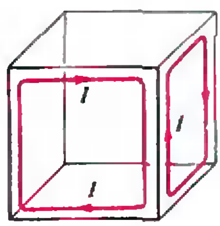


Рис. 3.

(знак «минус» получается при сравнении своего и соседнего потоков от контурного тока I — нарисуйте картинку «силовых» линий от такого тока и все станет очевидным).

Теперь можно найти L_3:

$$L_3=\frac{3\Phi_1-6\Phi_{21}}{I}=3(L_2-L_1).$$

М. Цыпин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1321 — М1335, Ф1328 — Ф1342, справились с задачами М1326, М1330, М1331. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Ю. Алексеенко (Киев) 21, 23, 24, 27, 32—34; *А. Ахмедов* (Баку) 21—25, 27, 28, 33—35; *С. Балахонов* (Обнинск) 27, 28; *Н. Батаев* (Киев) 21; *Ю. Батаев* (Киев) 21; *И. Белоус* (Днепропетровск) 32; *А. Бикмуллина* (Казань) 32; *М. Бокий* (Киев) 34; *К. Брейкш* (Брест) 32; *О. Бурд* (Киев) 23, 24, 27, 28, 32—34; *Н. Бурыкина* (Киев) 21, 22, 27, 29, 32—34; *Б. Вайнер* (Киев) 21—24, 27, 32—35; *А. Воскобойник* (Киев) 32; *П. Гаврилов* (Москва) 27, 28; *О. Гайдай* (Львов) 21—24, 27, 28, 33—35; *М. Гайдук* (Киев) 33; *Л. Григорарян* (Ереван) 32; *А. Григорьев* (Великие Луки) 23; *С. Гулийев* (Баку) 23; *А. Гурбанов* (Баку) 23, 28; *А. Даниленко* (Волгоград) 28; *А. Даценко* (Киев) 27; *С. Дектярев* (Санкт-Петербург) 21, 23, 24; *И. Доманов* (Донецк) 27, 28; *Д. Дудко* (Киев) 32—35; *Ф. Еникеева* (Ташкент) 21, 32, 34; *М. Ершов* (Троицк) 32, 34; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 21—24, 27; *В. Замятин* (Киров) 21, 23, 24, 27—29, 32—35; *С. Зеленов* (Киров) 22, 23, 27, 29, 32—35; *И. Казменко* (Дмитровград) 32; *И. Карабаш* (Донецк) 21, 23, 24, 27, 28, 32—35; *А. Карпицкий* (Обнинск) 27, 28; *Т. Кириченко* (Киев) 32; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) 21, 27, 28, 32; *А. Кравец* (Старый Оскол) 27; *Р. Кривень* (Павлодар) 32, 34; *В. Кулагин* (Харьков) 27, 28, 34; *М. Куликов* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 23—25; *Д. Кулин* (Санкт-Петербург) 27, 32; *А. Лапунов* (Киров) 21, 23, 24; *Е. Левашов* (Петропавловск) 21, 23, 27; *В. Левин* (Гомель) 32, 34; *П. Левин* (Москва) 21, 23, 24, 34, 35; *С. Маковей* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 24, 28; *И. Малашкин* (Москва) 27, 28, 34, 35; *К. Мальков* (Киров) 21, 23—25, 29, 32—35; *Ш. Мамедов* (Баку) 23; *Е. Матюшин* (Москва) 34; *А. Мильман* (Одесса) 23; *Т. Мальштейн* (Москва) 33; *С. Мясников* (Омск) 32, 34; *О. Наврузов* (Ургенч) 27; *Б. Насыпанный* (Гайворон) 21, 23, 24, 27—29, 32—34; *О. Неретина* (Санкт-Петербург) 27; *И. Нуретдинов* (Москва) 21; *С. Осипян* (Ереван) 33; *Д. Павлов* (Санкт-Петербург) 23, 27, 28, 32—34; *Д. Павлов* (Первомайск Николаевской обл.) 27, 32; *И. Павловский* (Омск) 23, 27, 28, 32, 34; *А. Памфилов* (Киев) 23; *Т. Пашаев* (Баку) 23; *В. Пиковский* (Киев) 21, 23, 24, 27—29, 32—34; *Е. Порошенко* (Алма-Ата) 21, 27, 28, 32, 34, 35; *А. Поташник* (Киев) 21, 32; *А. Прокофьев* (Донецк) 27, 28, 32, 34; *С. Расходникова* (Минск) 27, 28; *З. Сабиров* (к/з Коммунар Хорезмской обл.) 21, 23, 24, 33, 34; *С. Саприкин* (Одесса) 21, 23, 24, 27, 28, 32—34; *С. Сикорский* (с. Вузловая Львовской обл.) 28; *О. Синица* (Владивосток) 27, 28; *А. Солодушкин* (Степногорск) 22—24, 27, 28, 32—34; *А. Солонин* (Донецк) 27, 32, 34; *Д. Сонкин* (Калуга) 21; *И. Сороко* (Минск) 21; *В. Сушков* (Винница) 21, 28, 32—34; *О. Тевс* (Донецк) 27, 32, 34; *А. Топчий* (Омск) 21—25, 27, 28, 32—35; *М. Тройников* (Ижевск) 21, 23, 27—29, 32—34; *Е. Турчин* (Днепропетровск) 21, 23, 27, 29, 32—34; *А. Фрид* (Кемерово) 27; *С. Фукс* (Львов) 23; *П. Хицканян* (Тула) 32; *Р. Хмель* (Киев) 27; *И. Чаленко* (с. Камышовка Одесской обл.) 21—23; *А. Чижов* (Москва) 28; *А. Шныр* (Львов) 28, 32—34; *Е. Яковлев* (Алма-Ата) 21, 23, 27, 28, 32, 34; *Н. Ясинская* (Винница) 34.

Физика

А. Абдрахманов (Алма-Ата) 30; *И. Аввакумов* (Нижний Тагил) 29, 30, 33, 34, 36, 39; *А. Аграновский* (Воткинск) 30, 34; *М. Аллаберганов* (Ургенч) 29, 30, 34, 36; *А. Антонов* (п. Черноголовка Московской обл.) 30; *Д. Апальков* (Харьков) 28—30, 34—36; *Ю. Арбузов* (Старый Оскол) 29; *Г. Асадова* (Имишли) 29, 30; *С. Бабенкова* (Тамбов) 28, 30, 34, 36, 39, 40; *С. Балахонов* (Обнинск) 30, 32, 34; *Н. Батаев* (Киев) 30; *Ю. Батаев* (Киев) 30; *Д. Бокий* (п. Черноголовка Московской обл.) 29, 30, 32; *А. Болотов* (Винница) 29, 30; *Х. Болтаев* (Шават) 30; *А. Болтасева* (Канаш) 29, 30, 32—34, 38, 39, 42; *С. Борщев* (Алма-Ата) 30, 39, 40; *А. Буранбаев* (Алма-Ата) 29, 30, 34, 36; *А. Быстров* (Нижний Новгород) 30, 34; *Р. Ващенко* (Брест) 30, 32; *А. Ващилко* (Барановичи) 29, 30, 32, 34—36, 39, 40, 42; *А. Ведихин* (Казань) 29, 30; *А. Ветров* (Северодвинск) 30, 32, 34, 36, 38, 39; *А. Волозин* (Севастополь) 29, 30, 34, 36; *В. Воскобойников* (п. Черноголовка Московской обл.) 30, 32; *А. Вылугин* (Донецк) 29—32; *А. Галушко* (Борисов) 30; *П. Гвоздев* (Котельнич) 29, 30; *Р. Гладких* (Мурманск) 30, 34, 36; *Е. Горбенко* (Алма-Ата) 29, 30, 34, 36, 39; *В. Горгадзе* (Нальчик) 34, 36, 39, 40, 42; *О. Горобец* (Донецк) 31, 32; *С. Гращенко* (Барнаул) 30, 39; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 30, 32, 34—37; *Я. Грода* (Брест) 29, 30, 32, 36; *Д. Дадимов* (Минск) 30; *М. Дусчанов* (Шават) 30, 36; *О. Евкин* (Ростов) 29, 30, 32; *М. Емеленко* (Ижевск) 30, 34; *М. Емцева* (Мурманск) 30; *С. Жак* (Тернополь) 28—31; 33—42; *В. Железняков* (Вольск) 29, 30, 34, 36; *А. Жуков* (Омск) 29, 30; *Ю.304лизняк* (Киев) 32; *А. Засепский* (Брест) 29, 30, 32; *Б. Иманов* (Алма-Ата) 30, 36, 39, 40; *Ш. Исмоилов* (Ургенч) 29, 30, 34, 36; *А. Итин* (Калининград) 30, 32, 34, 36; *Е. Калинин* (Алма-Ата) 29, 30, 33—36, 39; *О. Каргальцев* (Мичуринск) 30; *А. Карпицкий* (Обнинск) 30, 32; *Т. Кендзерская* (Черновцы) 30; *А. Кирилюк* (Одесса) 30; *С. Киселев* (Днепропетровск) 29—32; *А. Ковалев* (Киров) 29, 30, 39; *К. Коваль* (Запорожье) 29, 30, 39, 40; *Б. Койчубаев* (Алма-Ата) 29, 30, 39, 40; *А. Колесников* (Воронеж) 29, 30, 32, 35, 40, 42; *М. Косицин* (Тольятти) 29, 30, 32—34, 36, 39;

(Продолжение см. на с. 50)

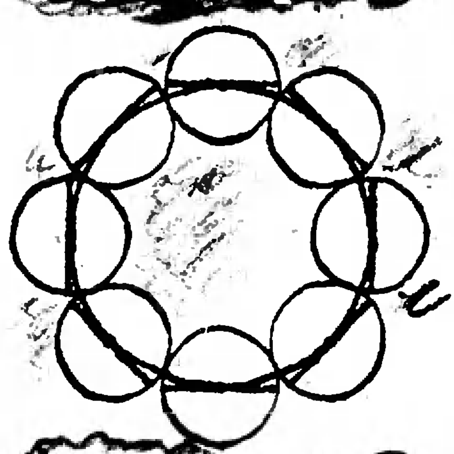
„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Фома и Ерема нашли на дороге по пачке семнадцатирублевок. В чайной Фома заплатил без сдачи этими купюрами за четыре стакана чая и семь калачей. Ерема взял шесть калачей и один стакан чая. Докажите, что и он сможет расплатиться этими купюрами без сдачи. (Стакан чая, как и калач, стоит целое число рублей.)

2. Решите числовой ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. КУ — простое число. А если КУ — составное?

3. Парижский метеоролог-любитель, ведший наблюдения с 1897 по 1907 год, делил все дни на холодные, средние и жаркие. Оказалось, что в некотором году число средних дней на столько же превосходило число жарких, на сколько число жарких превосходило число холодных. Назовите этот год.



4. Рассмотрим цепочку из равных касающихся окружностей, центры которых лежат на заданной окружности C (см. рисунок). Что больше: длина окружности C или сумма длин диаметров окружностей?

5. Мышка ночью пошла гулять.
Кошка ночью видит — мышка!
Мышку кошка пошла поймать.

А вот перевод (построчный) этого стишка на язык племени Ам-Ям:

Ам ту му ям,
Ту ля бу ам,
Гу ля ту ям.

Составьте фрагмент русско-ам-ямского словаря по этому переводу.

Эти задачи нам предложили Н. Антонович, М. Роллова, И. Акулич, А. Савин и Е. Федоров.

ИГРА НИТЕЙ В ОПЫТЕ РИХМАНА

Л. КРЫЖАНОВСКИЙ

Георг Вильгельм Рихман (1711—1753), немец по происхождению, но уроженец и подданный Российской империи, по праву считается родоначальником систематических исследований электричества в России. Начав их на полтора века позднее, чем на Западе, он быстро достиг уровня своих зарубежных коллег, а кое в чем даже превзошел их. Так, в 1745 году Рихман создал, по-видимому, первый в мире электроизмерительный прибор, который он назвал электрическим указателем (по-латыни — index electricus), для определения степени наэлектризованности тел.

Подвижная система прибора представляла собой льняную нить длиной $1^1/_2$ фута (46 см), к концу которой прикреплялось $^1/_2$ грана (31 мг) свинца (поэтому нить называлась «отвешенной»). Нить приклеивалась к верхней части металлического бруска. Прибор был снабжен круговой шкалой. Когда бруску сообщали заряд, по углу отклонения нити можно было фактически измерить электрическую силу.

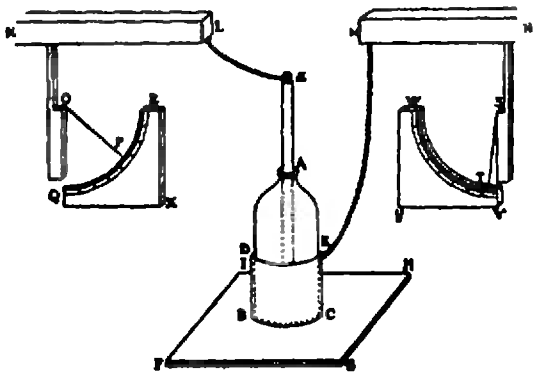
На Западе рихмановский электрометр получил название электрического гномона, поскольку по своей конструкции он напоминал древнейший астрономический инструмент — гномон, который служил для определения высоты и азимута Солнца и иногда применялся как солнечные часы.

Много различных опытов, в которых использовался указатель, провели и сам Рихман, и его последователи. Расскажем об одном из них — об опыте Рихмана с лейденской банкой. В этом опыте два электрических указателя подключались к так называемым обкладкам заряженной лейденской банки (см. рис. на с. 30). При прикосновении рукой к обкладкам заряженной банки или к соединенным с ними металлическим брускам наблюдалось опускание одной нити и подъем другой. Причем нити могли находиться в отклоненном состоянии достаточно долго, а опыт можно было повторять многократно, зарядив банку только один раз. На рисунке, взятом из публикации Рихмана, представлена ситуация после того, как экспериментатор прикоснулся к бруску MN. Если теперь коснуться бруска KL, то нить OP упадет, а нить ST поднимется.

Этот опыт хорошо известен: он был опубликован в трудах Петербургской Академии наук за 1758 год, а еще раньше — в трудах Лондонского Королевского общества за 1754 год. Кроме того, в 1956 году в нашей стране были изданы на русском языке все известные труды Рихмана по физике. Однако и для современного читателя опыт является таким же загадочным, каким он был для современников петербургского ученого.

Почему же возникает наблюдаемая «игра нитей»? Попробуем ответить на этот вопрос, обратив особое внимание на конструктивную особенность лейденской банки Рихмана. Дело в том, что внешней обкладкой банки Рихмана служил металлический цилиндр (наподобие подстаканника), который соприкасался со стеклянным сосудом лишь в некоторых местах. Как теперь известно*), в таком случае практически весь заряд оказывается сосредоточенным на водяной пленке, покрывающей стеклянную поверх-

*) См., например, статью «Загадка лейденской банки» («Квант», 1991, № 11).



ность банки. А тогда все процессы, происходящие в установке Рихмана, можно свести к процессам в электрофоре — приборе, построенном итальянским физиком Алессандро Вольта (1745—1827) в 1775 году. Полное название прибора — elettroforo perpetuo — в переводе означает «вечный электроноситель». Как же он устроен?

Представьте себе две накладываемые друг на друга пластины: одну, нижнюю, металлическую со слоем диэлектрика сверху (в первоначальном варианте — из смеси смолы и сургуча) или просто диэлектрическую (например, из эбонита), а другую, верхнюю, металлическую с изолирующей ручкой или изолирующим подвесом. Натирая диэлектрик тканью (или мехом), создают на нем заряд и накладывают на наэлектризованный диэлектрик верхнюю пластину. Вследствие несовершенства поверхностей, пластина будет соприкасаться с диэлектриком лишь в немногих точках, так что только незначительная часть заряда диэлектрика сможет перейти на пластину, остальная же наэлектризованная поверхность диэлектрика будет наводить (индуцировать) на обращенной к ней стороне пластины заряд противоположного знака, а на внешней (верхней) стороне пластины — заряд того же знака, который экспериментатор отводит в землю кратковременным прикосновением рукой. (При больших размерах электрофора отводить заряд через свое тело не безопасно, и в этом случае лучше предусмотреть специальный разрядник.) Если затем поднять пластину, она окажется заряженной. Пластину можно положить обратно и повторять описанную операцию многократно, не натирая диэлектрик и каждый раз получая на пластине почти неизменный заряд. С ней можно проделать различные опыты, например извлечь искру или зарядить лейденскую банку.

Возможно, вам будет интересно познакомиться со старинной инструкцией по изготовлению электрофора: ⟨на основе⟩ «круглого деревянного блюда, около полутора фута в поперечнике, коего края оклеены толстою бумагою на дюйм вышиною. Сей плоский сосуд обкладывается внутри листовым оловом или оклеивается золотою бумагою и наливается сполна составом из смолы и канифоли так, чтобы сверху было везде гладко. Когда сей состав совершенно застынет, то потри оный фланелью или кошечьею кожею и положи на него жестяную тарелочку, висящую на трех шелковых снурках. Сия тарелочка должна быть меньше нижнего сосуда, так чтоб края обоих на 1 или $1^1/_2$ дюйма друг от друга отстояли. Сделав сие, возьми одною рукою за снурки и спусти на потертый смоляной состав; потом дотронись другою рукою до тарелочки; после сего, подняв за снурки всю тарелочку, снова до нее дотронься; тогда соразмерно величине машины почувствуешь исходящую электрическую искру. Сие можно повторять очень долго и часто, не имея нужды смоляной состав натирать снова» («Краткое руководство к физике, для употребления в народных училищах Российской империи».— СПб., 1787, с. 80—81). Напомним перевод старинных мер длины в метрическую систему: 1 дюйм=2,54 см, 1 фут=30,5 см.

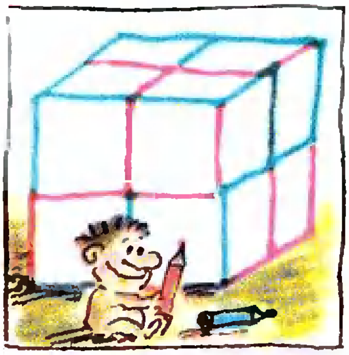
Возвращаясь к опыту Рихмана, отметим, что под действием заряда водяной пленки, покрывающей стекло, происходит разделение зарядов в «подстаканнике» (так называемая электростатическая индукция). Кратковременно касаясь обкладки или соединенного с ней металлического бруска, экспериментатор отводит в землю заряд с внешней поверхности обкладки. При этом на ее внутренней поверхности остается заряд противоположного знака, на который и реагирует электрометр. Аналогичные явления могут происходить и во внутренней обкладке лейденской банки.

Электрофор и рихмановская установка в принципе отличаются друг от друга только способом создания исходного заряда: электризацией трением в электрофоре и зарядкой от электрической машины в установке Рихмана.

Рихмана, погибшего от удара молнии при исследовании атмосферного электричества, сменил на его посту в Петербургской Академии наук немецкий ученый Франц Ульрих Теодор Эпинус (1724—1802), с 1757 года обосновавшийся в России. Пытаясь объяснить загадочный опыт Рихмана, Эпинус в своем знаменитом трактате «Опыт теории электричества и магнетизма» мысленно упростил экспериментальную установку Рихмана, заменив лейденскую банку плоским стеклянным конденсатором, а рихмановские электрометры — просто льняными нитями, приклеенными к верхней части обкладок вертикально расположенного конденсатора. Эпинус не смог дать физического объяснения «игры нитей», тем не менее стимулировал дальнейшие исследования.

Мысленный опыт Эпинуса был реализован его учеником и коллегой по совместным электрическим опытам в Германии Иоганном Карлом Вильке (1732—1796), который с 1759 года жил и работал в Швеции. Для нас представляет интерес описанный ученым в статье 1762 года плоский стеклянный конденсатор со съемными *пластинчатыми обкладками*, перемещающимися по изолирующим направляющим. К стержневым выводам конденсатора были приделаны пробные льняные нити. Вильке производил те же манипуляции и наблюдал те же эффекты, что и Рихман, с той только разницей, что мог перемещать обкладки. К сожалению, и Вильке не сделал четких выводов из своего опыта.

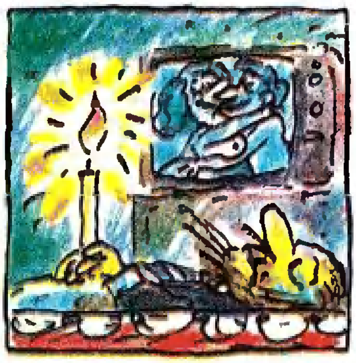
Конкурс «Математика 6—8»



Мы продолжаем третий конкурс по решению задач «Математика 6—8». Условия конкурса: в нем могут участвовать учащиеся 6—8 классов. Будет предложено 24 задачи, по 3 в каждом номере журнала. Победители будут награждены призами и дипломами. Решения задач этого номера высылайте до 1 февраля 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», с пометкой: «Конкурс «Математика 6—8». Не забудьте указать фамилию, имя, школу, класс и домашний адрес.

Задачи

7. В 1988 году телевидение Анчурии начало демонстрацию телесериала «По колено в слезах», причем в каждом году, начиная с 1989, было показано либо на 40 % больше, либо на 40 % меньше серий, чем в предыдущем. Чтобы не наносить большого ущерба экономике страны, ежедневно показывали не больше двух серий. При просмотре 1230-й серии зрители были опечалены ссорой главных героев, но ровно через два года в 1992 году порадовались их счастливому примирению в последней серии. Сколько серий содержал этот замечательный телефильм?



И. Акулич

8. Укажите хотя бы одно шестизначное число, являющееся точным кубом, такое, что все числа, получающиеся из него циклической перестановкой цифр ($abcdef$ — $bcdefa$ — $cdefab$ — $defabc$ — $efabcd$ — $fabcde$), делятся на кубический корень из этого числа.

Л. Курляндчик

9. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из 24-х полученных квадратов, окрашен в синий или красный цвет. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

В. Произволов

Школа в „Кванте"

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Кинематика, да и только» предназначена девятиклассникам, заметка «Ах, уж эта влажность» — десятиклассникам.
Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

Кинематика, да и только

Как известно, векторы перемещения, скорости и ускорения — важнейшие понятия кинематики. Попробуем расширить их круг.

Пусть, например, движение происходит вдоль некоторой координаты $l_\parallel$. Договоримся перемещение измерять в $м_\parallel$, а скорость $v_\parallel = \Delta l_\parallel / \Delta t$ — в $м_\parallel/с$. Теперь умножим скорость на площадь поперечного сечения $S_\perp$. Размерность величины $v_\parallel S_\perp$ будет $м_\parallel м^2_\perp/с$, или попросту $м^3/с$ (правда, в этой последней записи уже потеряна информация о том, что чему параллельно или перпендикулярно). При этом мы получим очень полезную вещь — единицу измерения объемного расхода. Это может быть, скажем, расход воды в реке или в ванне. В физике такие величины называют *потоками*. В принципе можно построить поток любого вектора (механического, электрического, магнитного), но в рассмотренном конкретном случае мы получили чисто кинематическое понятие, так как в него входят только пространственно-временные характеристики движения — скорость и площадь поперечного сечения.

А что, если скорость умножить на перемещение вдоль той же координаты, по которой происходит движение: $v_\parallel l_\parallel$? Получим нечто, измеряемое в $м^2_\parallel/с$. Ничего особенного, казалось бы. Однако это новое понятие становится особенно полезным, когда движение происходит по замкнутой траектории, например по окружности радиусом r. Тогда величина (тоже кинематическая) $v l_1$, где $l_1 = 2\pi r$, приобретает собственное имя: *циркуляция скорости*.

Такие движения — их обычно называют вихревыми — часто встречаются в природе — например, смерчи, торнадо, тайфуны; их можно наблюдать при сливе воды из раковины, иногда можно увидеть, как закручивается дымок выхлопной струи за автомобилем или любоваться цветными струями дымовых шашек за крыльями самолетов на авиапарадах.

Мы рассмотрим здесь простейший из вихрей, в котором величина скорости, направленной в каждой точке по касательной к окружности, обратно пропорциональна ее радиусу: $v = \Gamma/(2\pi r)$, где буква Γ и обозначает эту самую циркуляцию. Посмотрим, как в поле скоростей такого вихря деформируется какая-нибудь фигура, например первоначально (в момент времени $t=0$) имевшая вид круга с центром в точке O и радиусом r_0 (рис. 1).

Все точки очень тонкой полоски, принадлежащей кругу и заключенной между двумя очень близко расположенными дугами с радиусами r и $r+\Delta r$ с общим центром на оси вихря C (эта полоска закрашена), имеют одну и ту же скорость, так что ни длина, ни форма этой полоски со временем изменяться не будут. В моменты времени t_1, $2t_1$, ..., когда радиус CO повернется на угол φ_1, $2\varphi_1$, ..., эта полоска будет занимать положения, изображенные на рисунке тоже в виде закрашенных участков.

Точки всех других дуговых полосок будут двигаться по окружностям тоже с неизменными, но другими скоростями. Например, точка B будет двигаться быстрее, а точка A — медленнее закрашенной полоски, $|v_A| < |v_B|$. По кривой вверху рисунка можно узнать величину скорости каждой точки такой полоски и, поскольку угол ее поворота вокруг C пропорционален скорости, построить положения центров всех полосок в моменты времени t_1, $2t_1$, ...

Диаметр AOB нашего круга теперь будет принимать вид кривых $A_1O_1B_1$, $A_2O_2B_2$, ..., а окружность (которой принадлежат концы полосок) — вид некоторых замкнутых кривых, длина которых будет расти со временем.

Можно сказать и так: поскольку в поле вихря скорость каждой точки обратно пропорциональна ее расстоянию r до центра вихря C, за некоторое время каждая точка опишет дугу, длина которой тоже обратно пропорциональна этому расстоянию (модулю своего радиуса-вектора r). Но, как известно, центральный угол прямо пропорционален длине своей дуги и обратно пропорционален ее радиусу. В результате за одно и то же время радиус-вектор каждой точки повернется на угол, обратно пропорциональный квадрату ее расстояния от центра: $\varphi \sim t / r^2$.

Очевидно, что площадь, ограниченная этими замкнутыми кривыми, будет оставаться неизменной и равной πr_0^2.

(Для собственного удовольствия вы можете перед сном рассмотреть, как

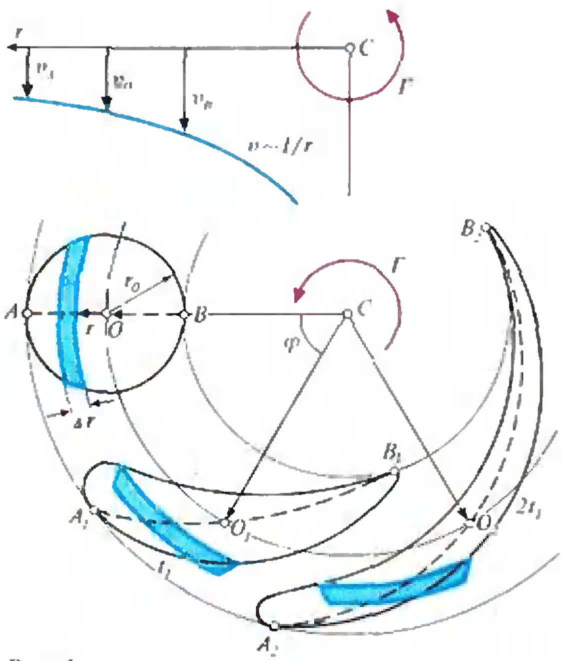


Рис. 1.

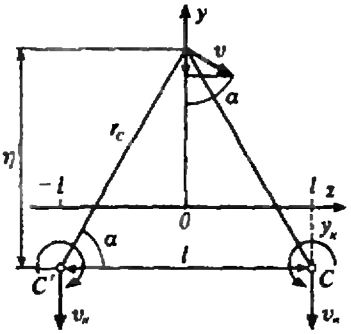


Рис. 2.

поле вихря деформирует любую другую замкнутую фигуру — квадрат, треугольник, вашу фотографию.)

Что мы описали таким образом? Ну, например, этот круг можно считать начальным сечением струи двигателя самолета, попавшей в поле вихря, образовавшегося у конца крыла (см. статью «Самолет в озоне» — «Квант», 1992, № 5 и 6). Тогда линия *AOBC* на рисунке 1 идет вдоль правого крыла самолета — при виде сзади.

Конечно, тут мы не рассмотрели еще один процесс — диффузию струи, которая будет приводить к дополнительному «расплыванию» первоначально круглого сечения. И еще не рассмотрели второй вихрь, с осью C', расположенный слева. А это попробуем сделать, учитывая, что он тоже создает поле скоростей, обратно пропорциональных по величине расстоянию до этого вихря, и используя принцип суперпозиции.

Применим этот принцип для точек, лежащих в плоскости симметрии между двумя вихрями (рис. 2). Прежде всего, если расстояние между вихрями l, то каждый вихрь будет создавать в том месте, где расположен второй вихрь, скорость $v_к = -\Gamma/(2\pi l)$ (ведь сам на себя вихрь не действует). Значит, оба вихря будут «топить» друг друга в воздухе с этой постоянной скоростью, а их ординаты будут линейно меняться со временем:

$$y_к = -|v_к|t.$$

В точках плоскости симметрии два вихря создадут суммарную скорость, направленную вертикально вниз (горизонтальные компоненты уничтожаются) и равную

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = -2\frac{\Gamma}{2\pi r_C}\cos\alpha,$$

$$\text{где } r_C = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \eta^2},$$

$$\eta = y - y_к, \quad \cos\alpha = \frac{l/2}{r_C},$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -2\frac{\Gamma l/2}{2\pi\left((l/2)^2 + (y + |v_к|t)^2\right)}.$$

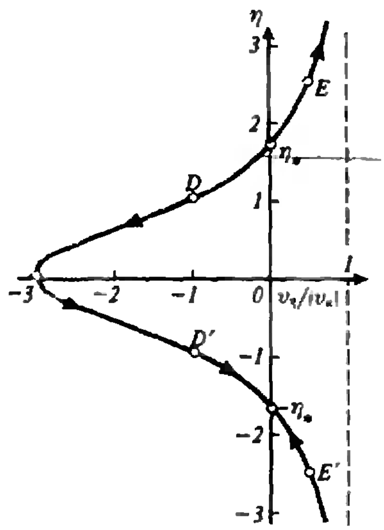


Рис. 3.

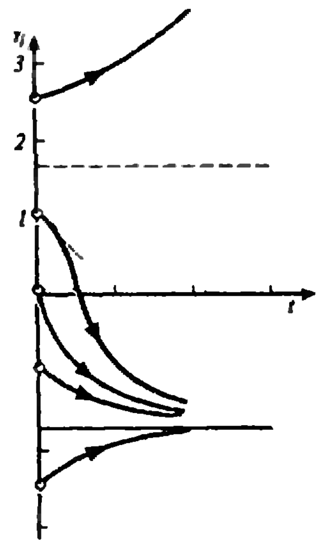


Рис. 4.

Правая часть этого уравнения зависит сразу и от y, и от t, и хотя для компьютера это не затруднение, но для нашего анализа это неудобно. Поэтому «пересядем» в систему координат, связанную с движущимися вихрями (поскольку они опускаются с постоянной скоростью, такая «пересадка» не приведет к появлению каких-либо дополнительных сложностей — обе системы инерциальны). Это равносильно вычитанию вертикальной скорости $v_к$, так что в новой системе вертикальная составляющая скорости $v_\eta = \Delta\eta/\Delta t$ будет равна

$$v_\eta = v_y - v_к = \frac{\Gamma}{2\pi l}\left(1 - \frac{l^2}{(l/2)^2+\eta^2}\right) = |v_к|\,\frac{\eta^2 - 3(l/2)^2}{\eta^2+(l/2)^2}.$$

Проанализируем дробь в правой части этого уравнения как функцию расстояния η между горизонтальной линией CC', соединяющей центры вихрей, и рассматриваемой точкой с координатой y в плоскости симметрии. Видно, прежде всего, что эта функция симметрична относительно значения $\eta=0$: изменение знака η не изменяет значения этой функции. В точке $\eta=0$ дробь принимает значение $v_\eta/|v_к| = -3$. В двух точках $\pm\eta_* = \pm\sqrt{3}\,l/2$ она равна нулю. При всех $|\eta| < \eta_*$ дробь отрицательна, при $|\eta| > \eta_*$ — положительна. При очень больших значениях $|\eta| \gg l/2$ она стремится к единице. Соответствующая кривая изображена на рисунке 3.

Теперь качественно проанализируем изменение ординаты η со временем (рис. 4). Если в начальный момент времени $t=0$ значение η лежит внутри интервала от $-\eta_*$ до $+\eta_*$, например в точках, соответствующих D или D', то скорость v_η при этом отрицательна и в обоих случаях ордината с течением времени будет стремиться к значению $-\eta_*$. Если при $t=0$ окажется, что $|\eta| > \eta_*$ (например, для точек E и E'), то скорости v_η будут положительными, только из E' значение координаты η стремится к $-\eta_*$, а из E — уходит от η_*. Можно сказать, что точка $-\eta_*$ «притягивает» к себе траектории, а точка $+\eta_*$ «отталкивает», и потому положение струи здесь неустойчиво. Впрочем, оказывается, все струи в плоскости симметрии неустойчивы, но это уже другой разговор.

В порядке тренировки попробуйте перерисовать кривые, изображенные на рисунках 3 и 4, для $y(t)$, т. е. вновь перейти в систему координат, связанную с самолетом, а не с вихрями.

Итак, только кинематика — как и было обещано.

А. Стасенко

Ах, уж эта влажность

Что такое влажность воздуха? Как ее можно рассчитать? Что нужно сделать, чтобы определить ее практически? Обсудим эти и подобные вопросы на примере одной-единственной задачи — задачи № 563 из Сборника задач по физике для средней школы (Рымкевич А. П., 1990). Вот ее условие:

Найдите относительную влажность воздуха в комнате при температуре 18 °С, если при 10 °С образуется роса.

И ответ: 59 %.

Решим задачу. Воспользуемся примечанием, которое приведено тут же в сборнике на соседней странице:

Относительной влажностью можно считать отношение плотности ϱ водяного пара, фактически находящегося в воздухе, к плотности ϱ_0 насыщенного пара при данной температуре:

$$\varphi = \frac{\varrho}{\varrho_0}\,100\ \%. \qquad (1)$$

Плотность ϱ_0 мы можем найти из таблицы зависимости плотности насыщенного пара от температуры: при $t_1 = 18$ °С $\varrho_0 = 15{,}4$ г/м^3. А плотность ϱ найдем из следующих соображений. Будем понижать температуру в комнате, считая ее герметически закрытой, до тех пор, пока не начнет выпадать роса. Тогда плотность водяного пара ϱ при температуре t_1 и плотность насыщенного пара ϱ' при точке росы, т. е. при $t_2=10$ °С, будут одинаковыми:

$$\rho=\rho'=9{,}4 \text{ г/м}^3.$$

В результате вычислений получаем ответ:

$$\varphi=61\ \%.$$

Сравнивая с ответом в задачнике, видим, что они заметно не совпадают. Почему?

Попробуем иначе. Решим теперь задачу по-другому — используя определение относительной влажности из школьного учебника по физике для 10 класса (Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б., 1990):

Относительной влажностью воздуха φ называют отношение парциального давления p водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению p_0 насыщенного пара при той же температуре, выраженное в процентах:

$$\varphi=\frac{p}{p_0}\,100\ \%. \qquad (2)$$

Обратимся к таблице зависимости давления насыщенных водяных паров от температуры и найдем в ней нужные нам значения: $p=1{,}23$ кПа, $p_0=2{,}07$ кПа. Отсюда получим

$$\varphi=59\ \%.$$

Этот ответ совпадает с ответом в задачнике.

Какое же из двух решений является более точным?

Обратимся к газовым законам. Пусть p, V и m — параметры водяного пара в ненасыщенном состоянии при некоторой температуре T, а p_0, V_0 и m_0 — параметры насыщенного водяного пара при той же температуре. Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для этих двух состояний:

$$pV=\frac{m}{M}RT, \qquad p_0V_0=\frac{m_0}{M}RT,$$

или

$$p=\frac{\rho RT}{M}, \qquad p_0=\frac{\rho_0 RT}{M}.$$

Поделив равенства друг на друга, получим

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Таким образом, значения относительной влажности, вычисленные по формулам (1) и (2), должны совпадать?!

Поиски продолжаются. При решении задачи мы в обоих случаях «крутились» вокруг точки росы. А что это такое собственно?

В последнем издании школьного учебника это понятие вообще не обсуждается, но в более раннем (1988 г.) говорилось:

Охлаждение пара при постоянном давлении рано или поздно превратит его в насыщенный пар... Температуру t_p, при которой водяной пар становится насыщенным, называют точкой росы.

Точку росы можно непосредственно определить с помощью так называемого конденсационного гигрометра. В специальный резервуар наливают легко испаряющийся эфир, вставляют туда же термометр и с помощью груши начинают быстро прокачивать воздух, вызывая тем самым интенсивное испарение эфира и понижение температуры в резервуаре. По термометру замечают температуру, при которой на полированной поверхности резервуара появляется матовый налет — роса. Это и есть точка росы.

Появление росы указывает, что пар стал насыщенным. Далее авторы учебника утверждают:

Давление в области, прилегающей к стенке (резервуара), можно считать постоянным, так как эта область сообщается с атмосферой и понижение давления за счет охлаждения компенсируется увеличением концентрации пара... Зная температуру воздуха и точку росы, можно найти парциальное давление водяного пара и относительную влажность с помощью таблицы зависимости давления насыщенного пара от температуры... Если точка росы известна, то тем самым известно парциальное давление водяного пара p. Зная p и p_0, находим относительную влажность:

$$\varphi=\frac{p}{p_0}\,100\ \%.$$

Значит, при определении точки росы в этом случае происходит процесс охлаждения при постоянном давлении. При этом исследуемый воздух не изолируется от атмосферы, и в процессе охлаждения его объем будет уменьшаться. Сюда — в незагерметизированную комнату или к охлаждаемой поверхности гигрометра — со всех сторон будет устремляться окружающий воздух, восстанавливая при этом прежнее давление. Следовательно, действительно давление насыщенного пара при точке росы будет в этом процессе таким же, как и парциальное давление водяного пара в исследуемом воздухе. Иными словами, замена в формуле (2) парциального давления ненасыщенного водяного пара на величину давления насыщенного пара при точке росы вполне законна.

Но надо иметь в виду, что в этом случае плотность водяного пара не остается неизменной, а все время увеличивается — из-за подтока окружающего воздуха, и поэтому формулой (1) пользоваться нельзя.

При решении задачи первым способом подход к точке росы совершенно другой — объем исследуемого воздуха, его масса и плотность предполагаются постоянными при охлаждении от комнатной температуры до точки росы. Значит, вместе с понижением температуры будет понижаться и парциальное давление, т. е. при таком подходе нельзя пользоваться, наоборот, формулой (2).

А какой из двух подходов к получению точки росы осуществляется на практике? В подавляющем большинстве случаев при определении относительной влажности приборами процесс происходит при постоянном давлении. Следовательно, решение по формуле (2) можно считать более правильным.

Ну, а как же быть с разными ответами, полученными по формулам (1) и (2)? Как мы выяснили, плотность ρ при комнатной температуре T_1 меньше, чем плотность ρ_{02} насыщенного пара при точке росы T_2, если понижение температуры происходит при постоянном давлении p. Используя уравнение Менделеева — Клапейрона для этих двух состояний, запишем

$$pV_1=\frac{m_1}{M}RT_1, \quad pV_2=\frac{m_2}{M}RT_2.$$

Заменив m_1/V_1 на ρ, m_2/V_2 на ρ_{02}, получим

$$\rho=\rho_{02}\frac{T_2}{T_1}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем

$$\varphi=\frac{\rho_{02}}{\rho_0}\frac{T_2}{T_1}100\ \%=59{,}4\ \%.$$

Резюме. Все изложенные здесь рассуждения — правильные. Ошибка была допущена только в одном предположении, что точка росы определяется при постоянном объеме, а в действительности, на практике, она измеряется при постоянном давлении.

В. Соловьянюк

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Сплошной диск катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v (рис. 1). Определите величину и направление скоростей точек A, B, C и D обода диска относительно неподвижного наблюдателя.

2. Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и положили на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем μ? Сколько оборотов сделает обруч до остановки?

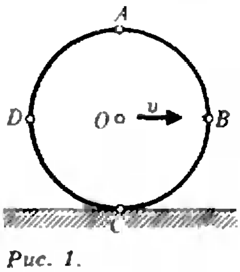


Рис. 1.

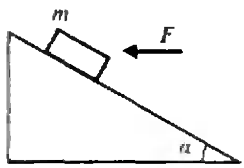


Рис. 2.

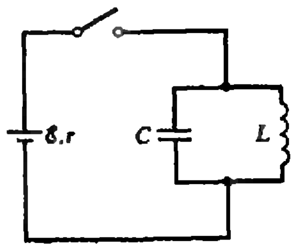


Рис. 3.

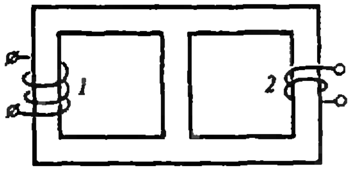


Рис. 4.

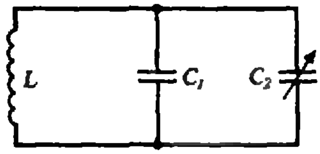


Рис. 5.

3. Тело массой $m=1$ кг лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения $\mu=0{,}1$. На тело действует горизонтальная сила F. Определите силу трения для двух случаев: $F_1=0{,}5$ Н и $F_2=2$ Н.

4. Все тела, измеренный пружинными весами, на экваторе некоторой планеты оказался на 10 % меньше, чем на полюсе. Найдите среднюю плотность планеты, если продолжительность суток на ней равна $T=8$ ч.

5. С какой горизонтальной силой надо действовать на брусок массой $m=2$ кг, находящийся на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30°$, чтобы он двигался вверх по плоскости равномерно (рис. 2)? Коэффициент трения $\mu=0{,}3$.

10 класс

6. Определите отношение плотностей влажного воздуха с относительной влажностью $\varphi=90$ % и сухого воздуха. В обоих случаях давление $p=100$ кПа, температура $t=27$ °С.

7. Одинаковое ли количество теплоты необходимо для нагревания газа до одной и той же температуры в сосуде, закрытом поршнем, если поршень а) закрепленный, б) легко подвижный?

8. Стакан горячей воды нужно как можно сильнее охладить за 10 минут. Как выгоднее поступить: сначала положить в воду кусок льда, а потом поставить ее на 10 минут остывать или дать ей остыть в течение 10 минут, а затем положить тот же кусок льда?

9. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $m=1$ кг воды при температуре $t=0$ °С. В цилиндре включают нагреватель мощностью $N=500$ Вт. На сколько поднимется поршень за $\tau=15$ мин работы нагревателя, если атмосферное давление $p=760$ мм рт. ст.? Считайте, что все джоулево тепло идет на нагревание воды.

10. В закрытый сосуд, содержащий $V=1$ м^3 сухого воздуха при температуре $t_1=0$ °С, положили $m=0{,}058$ кг льда, температура которого также 0 °С. Какова будет относительная влажность воздуха в сосуде после нагревания содержимого до $t_2=100$ °С?

11 класс

11. Найдите действующее значение напряжения генератора, вырабатывающего прямоугольные импульсы с периодом T, длительностью τ и амплитудой U_0.

12. Батарея с ЭДС $\mathscr{E}=1$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом подключена к колебательному контуру с индуктивностью $L=1$ Гн и емкостью $C=1000$ пФ (рис. 3). Определите максимальное напряжение на контуре после отключения батареи. Активным сопротивлением проводов катушки можно пренебречь.

13. По катушке, не имеющей омического сопротивления, протекает переменный синусоидальный ток. Начертите график изменения со временем мгновенной мощности катушки. Чему равна средняя за период мощность, потребляемая катушкой?

14. На железный сердечник намотаны две катушки (рис. 4). Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и делится поровну в разветвлениях. При включении катушки *1* в цепь переменного тока напряжением 40 В напряжение на катушке *2* равно 10 В. Какое напряжение будет на разомкнутых зажимах катушки *1*, если катушку *2* включить в цепь переменного тока напряжением 10 В?

15. Определите частоту собственных колебаний электрического контура, изображенного на рисунке 5, а также длину волны, излучаемой контуром. Контур содержит катушку индуктивностью $L=10$ мГн, конденсатор емкостью $C_1=880$ пФ и подстроечный конденсатор емкостью $C_2=20$ пФ.

Публикацию подготовила В. Тихомирова

Нам пишут

В глубь Земли

Как вы знаете, однородный сферический слой не создает внутри себя гравитационного поля. Тогда получается, что ускорение свободного падения g должно убывать как при поднятии над поверхностью сферической планеты, так и при погружении вглубь, достигая наибольшего значения на поверхности планеты. Однако реальные данные для Земли, например взятые из справочной литературы *) и приведенные здесь в таблице, свидетельствуют об ином: наибольшего значения g достигает внутри Земли, на глубине примерно 2900 км.

Таблица

Расстояние от центра Земли, км	Ускорение свободного падения, м/с²		
	Реальное	Для модели однородной Земли	Для модели линейного убывания плотности Земли
0	0	0	0
371	1,70	0,57	1,25
871	4,10	1,34	2,81
1371	6,00	2,11	4,21
1871	6,90	2,88	5,46
2371	8,02	3,65	6,55
2871	9,15	4,42	7,50
3371	10,20	5,19	8,29
3471	10,40	5,34	8,43
3871	10,05	5,96	8,93
4371	9,86	6,73	9,41
4871	9,85	7,50	9,74
5371	9,90	8,27	9,92
5571	9,84	8,58	9,94
5771	9,95	8,89	9,95
5971	9,94	9,19	9,93
6071	9,92	9,35	9,91
6171	9,89	9,50	9,88
6271	9,86	9,66	9,85
6338	9,83	9,76	9,83
6361	9,82	9,79	9,82
6371	9,81	9,81	9,81

Как объяснить это расхождение? Очевидно, неоднородностью Земли — увеличением ее плотности от поверхности к центру. По мере увеличения глубины погружения плотность, вообще говоря, возрастает монотонно, но на отдельных участках, например на границе земной коры и мантии, а также мантии и ядра, плотность меняется резко, скачком.

Для оценочного расчета выберем простейший линейный закон изменения плотности: на расстоянии r от центра Земли плотность $\varrho(r)=\varrho_0-\alpha r$, где $\varrho_0=12500$ кг/м³ — плотность в центре Земли, $\alpha>0$ — постоянная величина. Чтобы ее определить, запишем

$$\int_0^{R_З} \varrho(r)dV = M_З,$$

где $R_З=6371$ км и $M_З=5{,}976\cdot10^{24}$ кг — радиус и масса Земли соответственно, а $dV=d\,(4/3\pi r^3)=4\pi r^2dr$ — объем, заключенный между двумя концентрическими сферами радиусами r и $r+dr$, причем $dr\ll r$. Массу Земли можно связать с ее радиусом и средней плотностью $\varrho=5518$ кг/м³ соотношением

$$M_З=\frac{4}{3}\pi R_З^3\varrho.$$

Отсюда получаем

$$\alpha=\frac{4}{3R_З}(\varrho_0-\varrho).$$

Масса, сосредоточенная внутри сферы радиусом r, равна

$$m(r)=\int_0^r \varrho(r)dV = \frac{4\pi}{3}\left(\varrho_0 r^3-\frac{(\varrho_0-\varrho)r^4}{R_З}\right).$$

Поскольку неоднородный сферический слой, плотность в котором зависит только от расстояния от центра сферы, также не создает внутри себя гравитационного поля, ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли можно записать в виде

$$g(r)=\frac{Gm(r)}{r^2}=\frac{4\pi G}{3}\left(\varrho_0 r-\frac{(\varrho_0-\varrho)r^2}{R_З}\right),$$

где G — гравитационная постоянная. Запишем это выражение в более удобной для расчетов на калькуляторе форме, заменив $4\pi G$ на $3g_0/(R_З\varrho)$, где $g_0=9{,}81$ м/с² — ускорение свободного падения на поверхности Земли:

(Окончание см. на с. 69)

*) Енохович А. С. Справочник по физике. (М.: Просвещение, 1990)

Калейдоскоп „Кванта"

Изогонально сопряженные точки

С каждым треугольником ABC связано весьма интересное преобразование плоскости. Это преобразование устроено следующим образом.

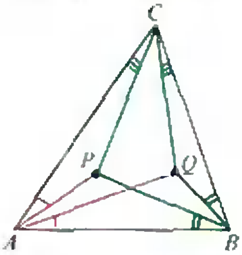


Рис. 1.

Пусть P — некоторая точка. Отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C. Полученные прямые пересекаются в одной точке Q (рис. 1). Мы не будем доказывать это утверждение, ограничимся лишь перечислением различных свойств преобразования $P \to Q$. Почти все доказательства несложные; заинтересованный читатель сможет найти их самостоятельно.

Это преобразование, примененное к точке Q, снова дает точку P. Точки P и Q называют изогонально сопряженными (относительно треугольника ABC), а преобразование, переводящее P в Q (а Q в P), называют изогональным сопряжением.

При изогональном сопряжении описанная окружность переходит в бесконечно удаленную прямую. Точнее говоря, если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то три прямые, симметричные прямым AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C, параллельны.

Изображенные на рисунке 2 красные области переходят друг в друга, синие и зеленые области тоже переходят друг в друга. Каждая незакрашенная область переходит сама в себя. Неподвижными остаются центр вписанной окружности и центры вневписанных окружностей. Других неподвижных точек нет.

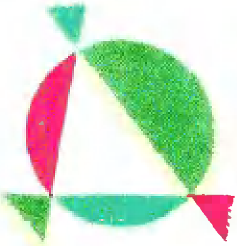


Рис. 2.

Изогонально сопряжены следующие пары точек:

а) точка пересечения высот и центр описанной окружности (рис. 3);

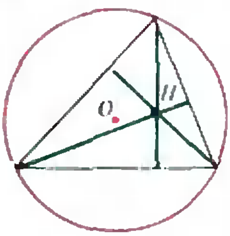


Рис. 3.

б) точка пересечения медиан (т. е. точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин) и точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до сторон (*точка Лемуана*) (рис. 4):

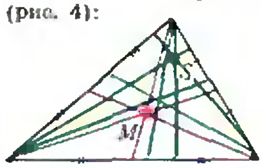


Рис. 4.

в) точка, из которой стороны треугольника ABC видны под углом 120° (*точка Торричелли*) и точка, проекции которой на стороны треугольника ABC, образуют равносторонний треугольник (рис. 5);

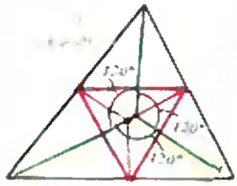


Рис. 5.

г) первая и вторая точки Брокара (рис. 6) (см. «Квант» № 1, 1992).

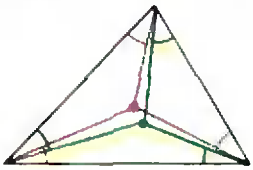
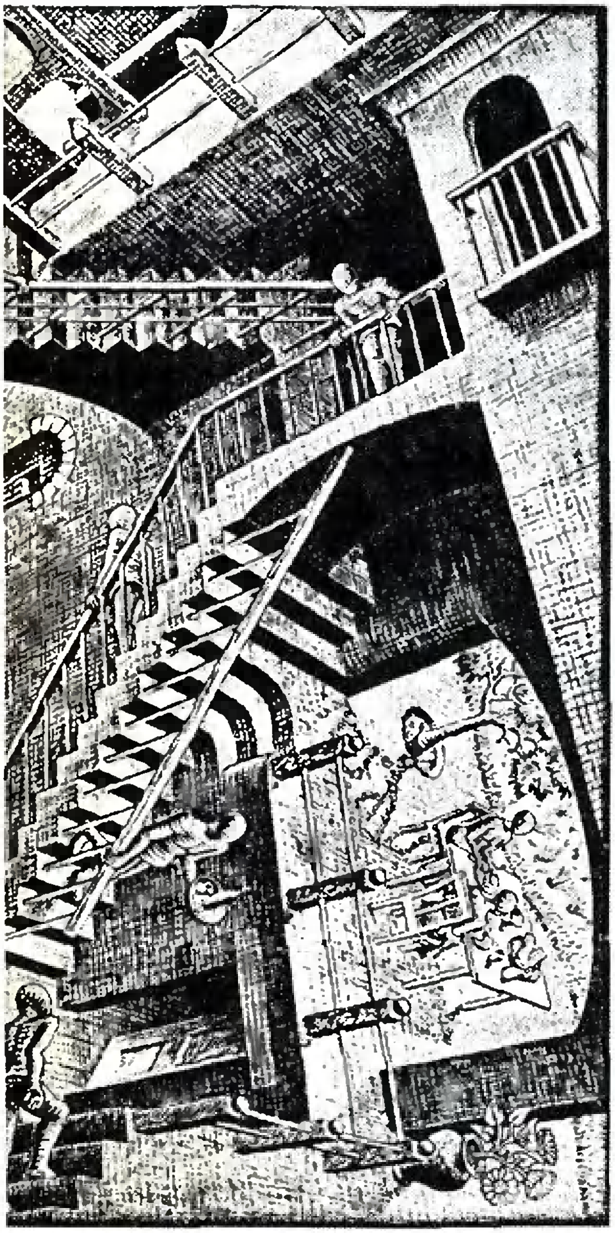


Рис. 6.

В некоторых системах координат связь между изогонально сопряженными точками выглядит довольно просто. Пусть, например, вершины треугольника ABC расположены в комплексной плоскости на единичной окружности $|z|=1$: a, b, c — комплексные координаты этих вершин. Тогда точки u и v, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, связаны соотношением

$$u+v+abc\bar{u}\bar{v}=$$
$$=a+b+c.$$



Числа $(x;\ y;\ z)$ называют *барицентрическими координатами* точки P относительно треугольника ABC, если $x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$. Эти числа определены однозначно с точностью до пропорциональности; если наложить условие $x+y+z=1$, то они будут определены однозначно. Пусть $(x,\ y,\ z)$ — барицентрические координаты некоторой точки. Тогда барицентрические координаты изогонально сопряженной с ней точки имеют вид $(a^2/x,\ b^2/y,\ c^2/z)$, где a, b, c — длины сторон треугольника ABC.

Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Такую же окружность можно рассмотреть для точки Q. Оказывается, что эти окружности совпадают.

В том случае, когда P и Q — точка пересечения высот и центр описанной окружности, совпадение окружностей означает, что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности (*окружность Эйлера*).

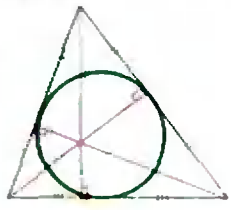


Рис. 7.

Более интересное утверждение получается для точки P, лежащей на описанной окружности. Изогонально сопряженная ей точка бесконечно удаленная. Поэтому основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на окружности бесконечного радиуса, т. е. они лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

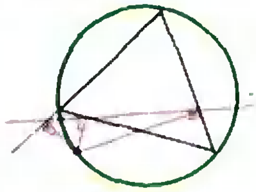


Рис. 8.

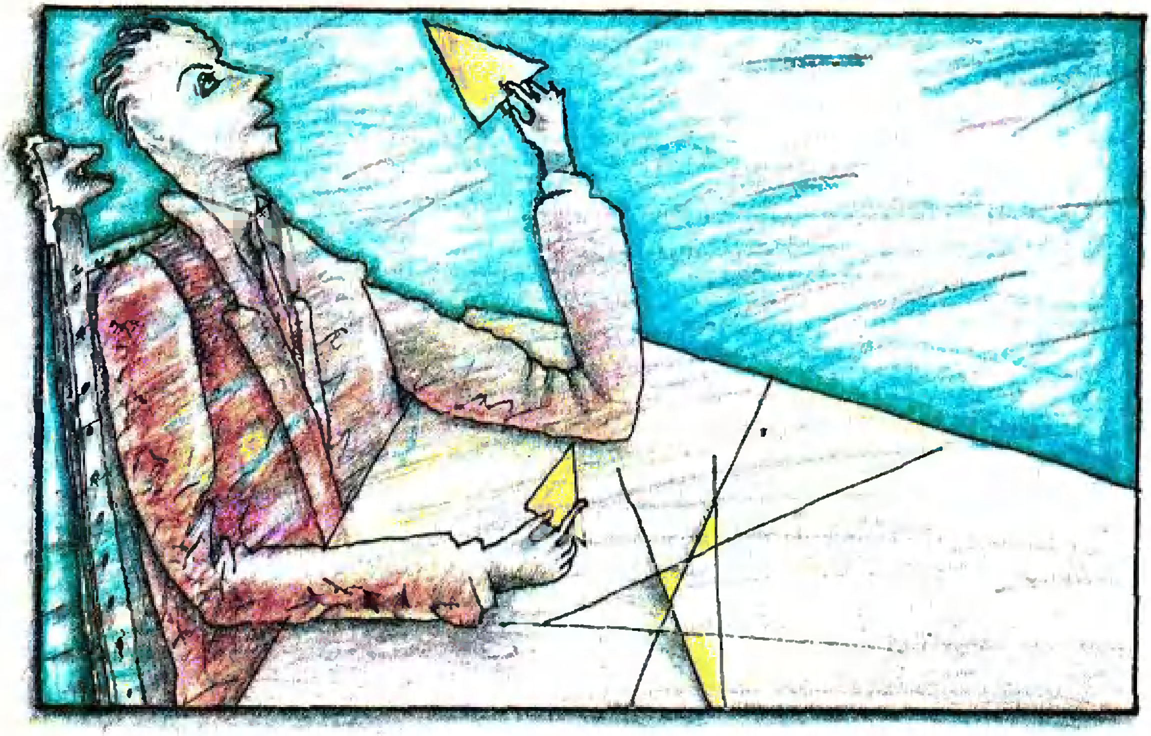
Прямая Симсона для точки P перпендикулярна прямым, полученным из прямых AP, BP и CP с помощью симметрии относительно биссектрис углов A, B и C.

Перечисление свойств изогонально сопряженных точек мы завершим упоминанием об одной кривой, связанной с треугольником. Эту кривую называют *кубика Томсона*; в барицентрических координатах ее можно задать уравнением третьей степени

$$a^2y^2z+b^2z^2x+c^2x^2y=$$
$$=a^2z^2y+b^2x^2z+$$
$$+c^2y^2x,$$

где a, b и c — длины сторон треугольника. Кубика Томсона проходит через многие замечательные точки треугольника: вершины, основания биссектрис, точку Лемуана, центр вписанной окружности. Не менее замечательно, что при изогональном сопряжении кубика Томсона переходит сама в себя.

Материал подготовил
В. Прасолов



Математический кружок

Треугольники и катастрофы

Кандидат физико-математических наук
А. КАНЕЛЬ,
А. КОВАЛЬДЖИ

Во втором номере нашего журнала за этот год по предложению Д. Фомина была опубликована задача М1330:

На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше а) $n/3$; б) $(n-1)/2$; в) $n-2$ треугольников.*

Нас будет интересовать точная оценка числа треугольников. Эта задача, простая и увлекательная по формулировке, была поставлена еще в 1870 году и стала проблемой на сто с лишним лет. Она затягивает, и кажется — решение вот-вот получится. Но почему-то каждая «Эврика!» лишь пополняла нашу коллекцию тонких ошибок.

Первое решение получили в 1979 г. известные геометры Грюнбаум и Шепард. Здесь мы излагаем более короткое элементарное решение, найденное А. Канелем. По существу его можно выразить тремя предложениями, однако формальный текст мало что даст для понимания. Мы постараемся проследить путь, на котором получено решение, и выявить ключевые идеи, поэтому вначале наши рассуждения будут проводиться на интуитивном уровне.

Ослабленная формулировка

На Московской городской математической олимпиаде в 1972 году была предложена следующая

Задача 1. *На плоскости проведено 3000 прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезали на куски. Докажите, что среди кусков найдется не менее а) 1000 треугольников, б) 2000 треугольников.*

Решение. Прежде всего ясно, что $n=3000$. Пункт а) совпадает с пунктом а) задачи М1330, а пункт б) является усилением ее пункта б), поскольку $2000>(3000-1)/2$.

Начнем с ключевой идеи. К каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник (треугольный кусок с основанием на прямой). Если это доказать, то получится решение пункта а), ибо каждый треугольник примыкает к трем прямым, и может оказаться ближайшим для всех трех.

Попробуем найти для каждой прямой примыкающий к ней треугольник, не пересеченный другими прямыми. Здесь красивая идея: выберем ближайшую к этой прямой точку пересечения других прямых (рис. 1). Покажите, что эта точка — вершина искомого треугольника.

Чтобы доказать пункт б), достаточно для каждой прямой найти еще один, примыкающий к ней, треугольник. Это кажется просто: ведь у прямой две стороны. Беда лишь в том, что все точки пересечения могут лежать по одну сторону от прямой... Но... не является ли плохой случай редкостью? Давайте посмотрим, сколько «плохих» прямых может быть.

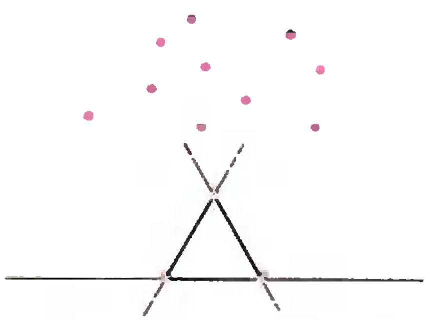


Рис. 1. Ближайшая точка пересечения.

Очевидно, что бывает три плохих прямых. К счастью, это самый плохой случай (когда их всего три). Если же прямых $n>3$, то плохих среди них не больше двух. Докажем это.

Допустим, что есть тройка плохих прямых. Нарисуем только их и еще одну прямую. В любом случае появятся точки пересечения по обе стороны от одной из плохих прямых (поскольку на четвертой прямой есть точка пересечения между двумя другими). Противоречие.

Итак, при $n>3$ найдутся не более двух прямых, к которым примыкает ровно один треугольник, а к остальным примыкает не меньше двух. Оценим число треугольников. Их, конечно, будет по крайней мере $(2n-2)/3$. В нашем случае это $1999\frac{1}{3}$. Но число треугольников целое, значит, их не меньше 2000.

Попутно доказано усиление пункта б) задачи М1330, поскольку $2(n-1)/3>(n-1)/2$.

Предлагаем вам несколько упражнений, идейно близких к только что решенной задаче.

Упражнения

1. В пространстве провели n плоскостей общего положения (любые четыре образуют тетраэдр). Докажите, что среди частей разбиения пространства найдется не меньше а) $n/4$ тетраэдров ($n\geqslant 4$), б) $(2n-3)/4$ тетраэдров ($n\geqslant 5$).

2 (на идею ближайшей точки). На плоскости отмечено n прямых ($n\geqslant 3$). Любые две из них пересекаются, и через каждую точку пересечения проходит не меньше трех прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.

3. В пространстве отмечено n плоскостей. Любые три из них имеют общую точку, и через каждую такую точку проходит не меньше четырех плоскостей. Докажите, что все плоскости проходят через одну точку.

Точная оценка — тонкие ошибки

Теперь приступим к нашей главной задаче:

На плоскости провели n прямых общего положения (любые три образуют треугольник). Докажите, что сре-

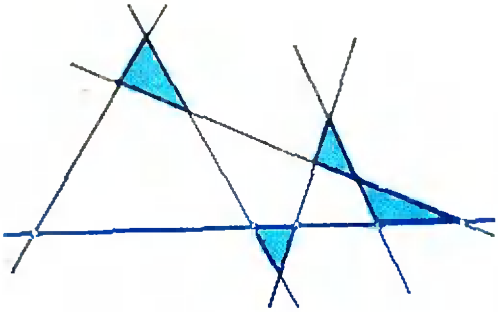


Рис. 2. От каждого треугольника остался треугольник.

ди частей разбиения плоскости найдутся $n-2$ треугольника, причем эта оценка точная.

Упражнение 4. Расположите n прямых общего положения так, чтобы треугольных кусков было ровно $n-2$.

В основе всех первоначальных попыток доказательства точной оценки лежало наблюдение, что *треугольник «неуничтожим»*, т. е. секущая прямая делит его на две части, одна из которых — треугольник. (Кстати, верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра и секущей плоскости?)

Вот одно из красивых «решений». Если найти любые $n-2$ треугольника, то, после пересечений, от них останется $n-2$ треугольных кусочка, и задача решена. Для этого выделим одну прямую. Остальные пересекают ее в $n-1$ точке. Эти точки высекают $n-2$ отрезка. Прямые, проходящие через концы отрезков,образуют с ними $n-2$ треугольника (рис. 2). Вот и все!

Упражнение 5*. Найдите ошибку в этом «решении».

Попытка применить индукцию

Поскольку треугольник неуничтожим, естественно попытаться применить индукцию: например доказать, что добавление прямой увеличит число треугольников.

Именно на этом пути получено большинство ошибок. А дело в том, что само утверждение неверно: добавление прямой может не прибавить треугольников!

Упражнение 6. Нарисуйте несколько прямых общего положения так, чтобы при удалении некоторой из них число треугольников не уменьшилось.

Были попытки доказать, что всегда найдется прямая, удаление которой уменьшит число треугольников (тогда бы прошла индукция), но решение было получено из других соображений. При этом остался открытым вопрос: верно ли, что такая прямая найдется?

Итак, добавление и удаление прямых нам не помогло,— поищем другой путь.

Избегать крайностей — тоже крайность

В понятии общего положения заметно стремление уйти от вырожденных случаев. Уже само слово «вырожденный» создает ощущение патологии, чего-то такого, чего не должно быть. И школа приучает к этому, запрещая, например, параллелограмм считать трапецией. Однако именно идея вырождения оказалась краеугольным камнем решения задачи о треугольниках. Начнем с примера.

Задача 2. *В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.*

Решение. Иметь дело с произвольным пятиугольником довольно трудно. А нельзя ли его «упростить»? Но не ради разбора частного случая (хотя и это полезно), а для того, чтобы свести общее решение к частному.

Давайте двигать вершину одного из треугольников параллельно его основанию (рис. 3). Тогда площади треугольника и пятиугольника не будут меняться, но будут меняться площади соседних треугольников.

Ключевая идея: если двигать вершину треугольника вдоль прямой, то его площадь будет либо возрастать, либо убывать, либо не меняться. (Поскольку основание одно и то же, а высота либо растет, либо убывает, либо не меняется). Иными словами:

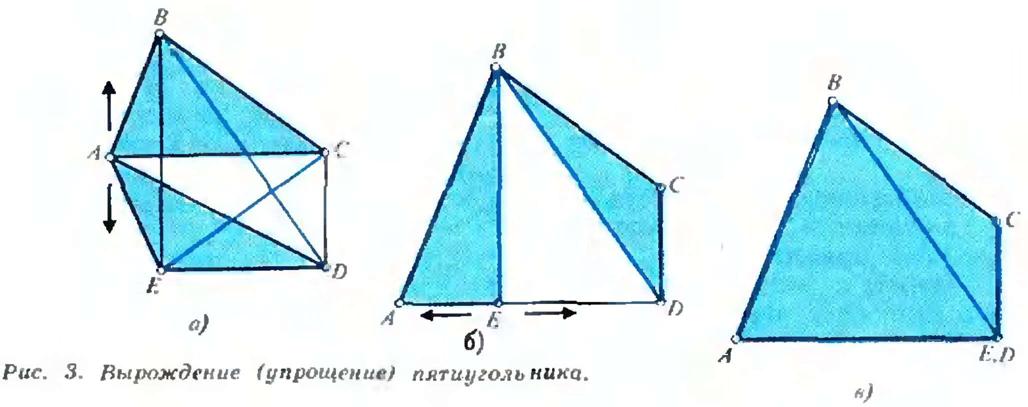


Рис. 3. Вырождение (упрощение) пятиугольника.

если вершина двигается вдоль прямой с постоянной скоростью, то площадь треугольника тоже меняется с постоянной скоростью.

Значит, сумма площадей всех треугольников тоже меняется с постоянной скоростью. Хорошо, если она не растет, потому что мы надеемся доказать неравенство для нового пятиугольника, а тогда для старого оно будет верно и подавно.

Но если площадь треугольников растет, то что делать? Очень просто: надо *двигать вершину в противоположную сторону*, и площадь будет *убывать*.

До каких же пор двигать вершину? Очевидно, пока пятиугольник остается выпуклым. Но в этом предельном положении один из углов пятиугольника равен 180 градусов... Ну и пусть, ведь пятиугольник стал проще! (Стал похож на четырехугольник.)

Теперь повторим это рассуждение для вершины с развернутым углом. Что получится? Она совпадает с одной из соседних вершин.

Можно двигать вершины и дальше, до предела, когда пятиугольник превратится в треугольник (с двумя двойными вершинами или одной тройной), но можно остановиться и раньше, поскольку треугольники EAB и BCD уже покрывают пятиугольник.

Итак, доказательство для исходного пятиугольника свелось к одному частному (вырожденному!) случаю, который очевиден.

Замечание. Можно двигать вершины пятиугольника вдоль произвольной прямой, тогда все площади будут меняться *линейно* (с постоянной скоростью), и нам достаточно следить за тем, чтобы разность площадей треугольников и пятиугольника (которая *тоже меняется линейно*) убывала.

Такими же средствами решается и ряд других задач.

Упражнения

7. В выпуклом шестиугольнике каждые три соседние вершины образуют треугольник. Всегда ли сумма площадей этих треугольников больше площади шестиугольника?

8. Из бумажного параллелограмма вырезали треугольник. Докажите, что площадь треугольника не превосходит половины площади параллелограмма.

9. Докажите, что у выпуклого многоугольника найдутся три вершины, которые образуют треугольник максимальной площади среди треугольников, вписанных в него.

10. В кубе «сидит» выпуклое тело, чья проекция на любую грань куба полностью ее покрывает. Докажите, что объем тела не меньше трети объема куба.

11. На отрезке отмечено n точек. Какова максимально возможная сумма попарных расстояний между ними?

12. Покажите, что максимум линейной функции от координат точек $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ внутри выпуклого многогранника достигается в одной из его вершин.

13. Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит *200 кг*, а *полный алмазов — 40 кг*. Пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 динариев, а килограмм алмазов — 60. Сколько денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести *не более 100 кг?*

Во всех этих задачах хорошо работают три идеи: 1) сведение общей ситуации к частному случаю посредством движения, 2) выбор линейного движения, которое в одном из направлений улучшает ситуацию, 3) рассмотрение граничных (краеугольных) случаев, которые часто бывают вырожденными.

Сама возможность не вникать в процесс движения, а сразу смотреть во главу угла принципиально важна: мы встретим ситуацию, когда варианты движения необозримы, но можно воспользоваться информацией о финальном состоянии.

Поэтому в дальнейшем мы будем: 1) двигать прямые, приводя их расположение к удобному виду, 2) использовать линейное движение, т. е. параллельный перенос с постоянной скоростью, 3) изучать предельные положения прямых.

План действий

Ближайшие рассуждения не войдут в окончательное решение, однако их стоит рассмотреть, поскольку, во-первых, они привели к решению, во-вторых, похожими средствами решаются многие известные задачи и, в-третьих, полезно проследить «чистку» решения. В результате мы получим решение на интуитивном уровне. Затем сделаем рассуждения строгими и, наконец, приведем короткое формальное доказательство.

Где живут треугольники?

Еще, быть может, каждый атом —
Вселенная, где сто планет;
Там все, что здесь, в объеме сжатом,
А также то, чего здесь нет.

В. Брюсов

Из-за обилия случаев расположения прямых все попытки в них разобраться потерпели неудачу. Попробуем двигать прямые. Ради линейности будем двигать их параллельно самим себе. Что может произойти?

Пока прямые не проходят через точки пересечения других прямых, картина в принципе не меняется. Но если несколько точек пересечения совпадут — произойдет «катастрофа», — исчезнет один или несколько треугольников. После катастрофы произойдет «перестройка», результат которой непредсказуем (рис. 4).

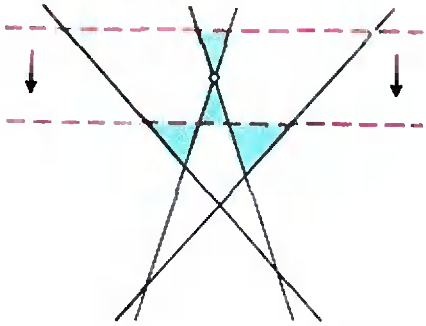


Рис. 4. Гибель и рождение треугольника при движении пунктирной прямой.

Поэтому доводить дело до катастрофы мы не будем, а остановимся за одно мгновение до нее, тогда треугольники не исчезнут и не появятся, а лишь уменьшатся. То, что получится, назовем фокусом прямых. Фокус, таким образом, это несколько прямых, все точки взаимного пересечения которых лежат в малой области, почти точке, причем эта область не пересекается с другими прямыми (рис. 5).

Для нас особенно важно, что в фокусе наблюдается разбиение плоскости в миниатюре, но с меньшим числом прямых. Иначе говоря, фокусы — это обособленные «миры», в которых

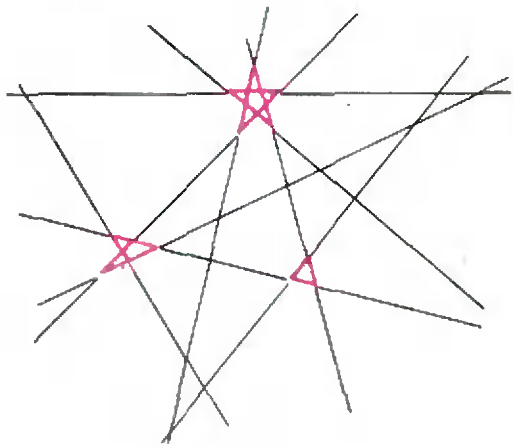


Рис. 5. Фокусы.

живут свои собственные крошечные треугольники. Поэтому, если удастся «развалить» картинку на фокусы, то треугольники станет легче считать (поскольку для меньшего числа прямых задачу можно считать решенной по предположению индукции).

Вернемся к индукции

Итак, предположение индукции состоит в том, что любые k прямых при $k<n$ разбивают плоскость на части, среди которых не меньше, чем $k-2$ треугольника. Значит, в фокусе из $k<n$ прямых найдутся $k-2$ треугольника.

Пусть, к примеру, двигая прямые, нам удалось их все собрать в два фокуса: в один — с 1-й по k-ю, в другой — с k-й по n-ю, причем k-я прямая общая (рис. 6). Тогда в фокусах наберется $(k-2)+(n-k+1-2)=n-3$ треугольника, и для индукционного перехода надо найти еще один треугольник вне фокусов. Это можно сделать (достаточно найти пересеченный треугольник), однако удастся ли нам все прямые собрать ровно в два фокуса? К сожалению, нет. А когда фокусов много, возникает разнообразие случаев. Что делать?

Где границы возможного?

Исследуем процесс образования фокусов. Вначале прямые могут двигаться независимо, но если образовался фокус, то его надо сохранять, т. е. прямые фокуса двигать, как одно целое в виде «ежа» (мы запрещаем прямым фокуса двигаться относительно друг друга для того, чтобы, во-первых, предотвратить катастрофу, а во-вторых, сохранить разбиение плоскости в миниатюре). Фокусы (почти точки) могут дополняться новыми прямыми или объединяться (в одну почти точку), а их сохранение будет все сильнее ограничивать свободу движения и, наконец, все возможности двигать прямые будут исчерпаны.

При этом надо избежать стягивания всей картинки в один фокус (чтобы применить индукцию по числу прямых). Достаточно, например, зафиксировать две точки пересечения (чтобы они не попали в один фокус).

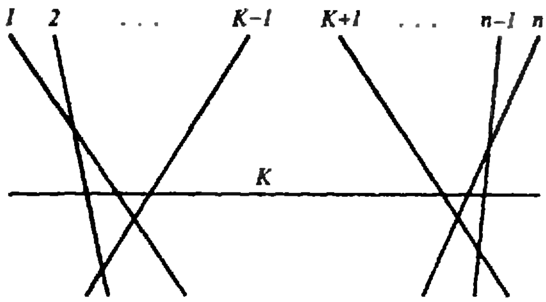


Рис. 6. Два фокуса.

Теперь поймем, как связаны скорости прямых в одном фокусе. Две прямые можно двигать произвольно, а остальные должны под них подстраиваться (рассмотрите случай трех прямых). Иначе говоря, сохранение фокуса из k прямых требует $k-2$ соотношений между их скоростями. Но в этом же фокусе, по нашему предположению, найдутся $k-2$ треугольника,— *столько, сколько соотношений*. Не здесь ли ключ к решению?

Попробуем оценить число треугольников через число соотношений в конечном состоянии (когда прямые потеряют подвижность). Вначале мы закрепили одну прямую и две точки пересечения на ней, т. е., фактически, три прямые. У нас остались $n-3$ свободные прямые. Будем фокусировать их до упора. Для сохранения фокусов потребуется $n-3$ соотношения. По предположению индукции число треугольников в каждом фокусе не меньше числа соотношений, значит всего треугольников не меньше, чем $n-3$.

Заключительный аккорд

Осталось найти еще один треугольник. Всего один, где-то между фокусами. Но как его искать — неясно...

Подумаем: если нам нужен еще один треугольник, то зачем его искать? Нельзя ли сделать так, чтобы он *был с самого начала?* Нам-то ведь все равно, какие три прямые зафиксировать вначале. Давайте *зафиксируем те, которые уже образуют треугольник!* Задача решена!

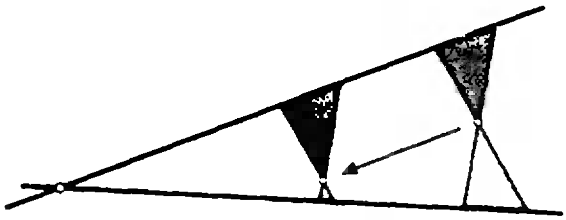


Рис. 7. Сохраняя синий треугольник, можно сжимать красный.

Изготовление решения

Наша работа еще далеко не кончена: чтобы записать решение, надо наши рассуждения очистить, усовершенствовать и сделать строгими. Важно понять связь между треугольниками и фокусами, в частности, почему число треугольников в фокусе не меньше числа соотношений, нужных для его сохранения.

Упражнение 14 (на идею фокуса). Докажите с помощью движения одной прямой, что к ней примыкает треугольник.

Итак, мы решили сначала закрепить один, произвольно выбранный, треугольник — это спасло нас от общего «коллапса» и дало треугольник вне фокусов. А не сохранить ли нам, ради равноправия, *сразу все треугольники?* Тогда при движении прямых фокусы вообще не появятся (поскольку в фокусе существует треугольник, который до этого сжимался, т. е. не сохранялся).

Но если картинка окажется нежесткой, то при некотором движении фокус все же появится. Это будет противоречием. Значит, сохранение всех треугольников гарантирует жесткость картинки, и нам достаточно показать, что, сохраняя меньше, чем $n-2$ треугольника, нельзя добиться жесткости.

Вспомним, как мы сохраняли фокус: разрешали ему двигаться как целому. Простейший фокус — это треугольник. Поступим с обычным треугольником так же: разрешим перемещаться, но сохраним размер. (Проверьте, что полное фиксирование $n/3$ треугольников может привести к потере подвижности прямых.)

Но теперь мы не зафиксировали и начальный треугольник, поэтому, чтобы избавиться от неинтересных параллельных переносов всей картинки, *закрепим две прямые.* (Кстати, положение фокуса тоже определялось двумя прямыми.)

Каждый треугольник, как и простейший фокус, дает одно соотношение для скоростей прямых. Следовательно, сколько мы сохраним треугольников — столько получим соотношений.

Итак, надо выбрать $n-2$ скорости, которые мы назовем параметрами. Если треугольников мало (меньше числа параметров), то сохранение их размеров не обеспечит жесткости (рис. 7).

Но почему, если нет жесткости, можно получить фокус? У нас, как и в задаче про пятиугольник, есть возможность *двигать прямые в обратную сторону*, т. е. менять знаки всех скоростей на противоположные, поэтому можно направить одну из прямых к точке пересечения закрепленных прямых,— и тогда фокус неминуем. (Забавно, что при изготовлении решения индукция исчезла, как исчезают строительные леса при возведении зданий.)

Суммируем...

Сначала мы закрепили две прямые, а остальным разрешили двигаться с постоянными скоростями так, чтобы *размеры всех треугольников сохранялись.* Тогда, если треугольников окажется меньше, чем $n-2$, то скорости прямых можно выбрать ненулевыми (будет доказано). Меняя, если надо, направления всех скоростей, можно создать фокус, где и обнаружится неучтенный треугольник. Противоречие.

Уточним рассуждения

Чтобы получить строгое доказательство, необходимо уточнить наши интуитивные рассуждения, и прежде всего о жесткости. Переведем их на язык алгебры, где скорости — неизвестные, а соотношения — уравнения для них. Подвижность прямых означает, что существует ненулевое решение системы уравнений.

Каждый, кто возился с системами, знает, что, как правило, если число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет конечное множество решений; если уравнений больше, чем неизвестных (переопределенная система), то решений нет; если уравнений меньше, чем неизвестных (недоопределенная система), то решений бесконечно много. Последним соображением мы и воспользовались.

К сожалению, эти соображения верны только «как правило». Например, система

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

решений не имеет, хотя число уравнений в ней меньше числа неизвестных. Однако в частном случае, когда все уравнения линейные и однородные, справедлива следующая

Теорема. *Недоопределенная система m линейных однородных уравнений с n неизвестными ($m<n$)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Докажите эту теорему по индукции, последовательно избавляясь от неизвестных методом подстановки. (Доказательство можно найти в любом курсе линейной алгебры.)

Переведем разговоры о соотношениях для скоростей прямых на язык линейных уравнений (скорость прямой — это скорость ее удаления от начального положения).

Можно убедиться (выражая координаты или векторы), что точка пересечения двух прямых, движущихся с постоянными скоростями, тоже движется с постоянной скоростью, и стороны треугольника меняются с постоянной скоростью, откуда вывести, что *условие сохранения размера треугольника выражается линейным однородным уравнением для скоростей прямых.*

Докажем последнее утверждение геометрически. При параллельном переносе треугольника образуются три параллелограмма (рис. 8), причем площадь одного из них равна сумме площадей остальных. Площадь параллелограмма есть произведение стороны треугольника на величину сдвига прямой.

Будем считать направление сдвига прямой положительным, если треугольник растет. Тогда условие равенства площадей параллелограммов запишется в виде линейного однородного уравнения

$$a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3=0,$$

где a_1, a_2, a_3 — стороны треугольника, h_1, h_2, h_3 — сдвиги прямых. Таким же точно уравнением связаны и скорости прямых.

Итак, условие сохранения всех треугольников — это система линейных однородных уравнений. Как видите, линейность принесла плоды.

Упражнение 15. Покажите, что в системе координат (x, y) в момент времени t уравнение прямой, движущейся со скоростью v, можно записать в виде:

$$x\sin u - y\cos u = c + vt,$$

где u — угол наклона прямой к оси абсцисс.

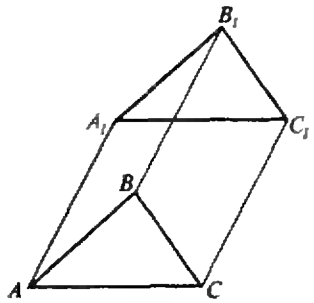


Рис. 8. Три параллелограмма. $S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}=S_{AA_1C_1C}$.

Строгое доказательство

В заключение приведем строгое доказательство, в котором, как это и принято в серьезной литературе, скрыты все повороты мысли. Такие тексты напоминают ребусы или компьютерные программы без комментариев. Их смысл, по выражению академика В. И. Арнольда, подобно притчам, разъясняют лишь ученикам наедине.

Допустим, что число k треугольников разбиения меньше, чем $n-2$. Пусть d — минимальная из сторон треугольников; $v_1, ..., v_n$ — скорости прямых в перпендикулярных направлениях, причем $v_1=v_2=0$.

Условие сохранения размеров всех треугольников равносильно системе k линейных однородных уравнений для скоростей v_i $(i=3,..., n)$, которая (согласно теореме) имеет ненулевое решение.

Можно считать (поменяв, если надо, направление времени), что некоторая прямая l_i движется в сторону точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Существует момент («катастрофа»), когда три или больше прямых проходят через одну точку. Пусть t — первый такой момент, тогда в момент

$$t_1=t-d/(2\max v_i)$$

найдутся три прямые, которые образуют непересеченный треугольник со стороной меньше d. Это противоречит сохранению размеров всех треугольников. Утверждение доказано.

Замечания

1. Условие задачи о треугольниках обобщается *для пространств* любого числа измерений, в частности: если в трехмерном пространстве провели n плоскостей общего положения, то среди частей разбиения пространства найдутся не меньше, чем $n-3$ тетраэдра. (Почему треугольников $n-2$, а тетраэдров $n-3$? Что будет в одномерном случае?)

2. Просматривая решение, можно убедиться, что требование общего положения прямых можно ослабить: если среди n прямых на плоскости любые две пересекаются, и *не все прямые проходят через одну точку*, то среди частей разбиения плоскости найдутся $n-2$ треугольника.

Главное отличие состоит в том, что в процессе движения могут разрушаться точки многократного пересечения, и тогда возникнут новые треугольники. Но эти треугольники будут расти с постоянной скоростью, и их легко отличить от искомого треугольника, который сжимается в точку.

Проведите соответствующие рассуждения самостоятельно.

Список читателей, приславших правильные решения
(Начало см. на с. 26)

В. Кругляк (Ясиноватая) 39; *А. Кудряшов* (Канаш) 29, 30, 32, 34, 35, 39, 41, 42; *В. Кулагин* (Харьков) 30; *Ю. Кулик* (Канев) 30; *Д. Кюрчев* (Бердянск) 34, 36; *Р. Лазаускас* (Вильнюс) 29, 30, 33, 35; *П. Левин* (Москва) 28—31, 33—36, 38—41; *В. Леонов* (Старый Оскол) 30; *К. Лепесов* (Алма-Ата) 30; *В. Лобас* (Киев) 29—32, 34; *Е. Лонская* (Москва) 32; *Р. Лукша* (Брест) 29, 30, 32; *С. Лысенко* (Старый Оскол) 30, 32; *К. Мазюкевич* (Киев) 30; *С. Макаров* (Усинск) 33, 36; *С. Малашицкая* (Кузнецовск) 34, 35; *В. Манукян* (Ереван) 39, 40; *Д. Марьенко* (Киев) 30; *О. Матысик* (Брест) 32; *М. Махмудов* (Исфара) 30; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 29, 30, 32—34, 36, 37, 39—41; *В. Мушик* (Кузнецовск) 30, 32, 34—36; *А. Мясоед* (Старый Оскол) 29, 30; *А. Наводкин* (Комсомольск) 30; *Т. Назарова* (Желтые Воды) 30, 36, 37, 41; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 29, 30, 33—36, 39—41; *А. Насонов* (с. Кензово Липецкой обл.) 28—33, 36, 37, 42; *И. Нестеренко* (Старый Оскол) 34; *С. Нечаев* (Борисов) 30, 35; *Г. Новичков* (Троицк) 29—31; *С. Носенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 30, 32, 34, 39; *К. Нурматов* (Наманган) 28, 30, 38; *О. Омонов* (Наманган) 30; *С. Осипян* (Ереван) 39, 40; *Р. Остроумов* (Троицк) 29—31; *Х. Отожонов* (Ургенч) 29, 30, 40; *А. Павлик* (Новая Ушица) 29, 30, 32—37, 39—41; *А. Пагнуев* (Ставрополь) 30; *Д. Пастухов* (Витебск) 28—30, 32—34, 36, 38—42; *О. Педоренко* (Виница) 30; *А. Пикалов* (Канаш) 29, 30, 32, 34, 39, 41, 42; *Е. Подгорная* (Винница) 30; *В. Подольский* (Черновцы) 30; *А. Полетов* (Череповец) 30; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 30, 33—35,

(Окончание см. на с. 56)

Практикум абитуриента

Тригонометрические задачи

1. Выясните, какое из двух чисел больше:

а) sin 5 или sin 6,
б) cos 7 или cos 8;
в) tg 8 или tg 3°;
г) sin 3 или sin 3°,
д) $\arcsin\frac{2}{3}+\arcsin\frac{3}{4}$ или $\frac{\pi}{2}$;
е) $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$ или $\frac{\pi}{5}$; ж) $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}$ или $\frac{\pi}{5}$;
з) $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$ или $\frac{\pi}{5}$.

2. Вычислите:

а) $\arcsin\sin 10$; б) $\arccos\cos 10$;
в) $\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,10$; г) $\mathrm{arcctg}\,\mathrm{ctg}\,10$;
д) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$; е) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$;
ж) $\cos(\mathrm{arctg}\,5)$;
з) $\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{ctg}^3 x$, если $\sin x+\cos x=a$.

3. Докажите тождество:

а) $1+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^3 x=\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^3 x}$;

б) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,2x-\mathrm{tg}\,x}=\sin 2x$;

г) $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=\mathrm{tg}\,3x$;

д) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha$;

е) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$;

ж) $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arcctg}\,x=\frac{\pi}{2}$.

4. Решите тригонометрическое уравнение:

а) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$;

б) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\mathrm{tg}\left(5x+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\cos x+\cos 5x=2$; д) $\sin x\sin 5x=1$;
е) $\sin\cos x=\cos\sin x$; ж) $\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,7x=1$;
з) $\mathrm{tg}(4\sin x)=\sqrt{3}$; и) $\mathrm{ctg}(3\cos x)=1$;
к) $\sin 5x=\sin x+\sin 2x$;
л) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$;
м) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$;
н) $3\sin 2x+8\cos^2 x=1$;
о) $\cos x\cos 3x=\cos 2x$;
п) $3\sin x+4\cos x=5$;
р) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$;

с) $2\sin^2 x+\sin^2 2x=\frac{5}{4}-2\cos 2x$;

т) $2\sin^2 x=4\sin^2 2x+7\cos 2x-6$;

у) $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$;

ф) $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x$;

х) $1+\sin 2x=\cos x-\sin x$;

ц) $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{1}{\sin 3x}$;

ч) $4\,\mathrm{tg}\,4x-4\,\mathrm{tg}\,3x-\mathrm{tg}\,2x=\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,3x\,\mathrm{tg}\,4x$;

5. Решите «комбинированное» уравнение:

а) $4|\sin x|+2\cos 2x=3$;
б) $\sqrt{10}\cos x=\sqrt{4\cos x-\cos 2x}$;
в) $\left|\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=1-\dfrac{1}{\cos^2 2x}$;

г) $\sqrt{\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$;

д) $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$;

е) $\cos x-2\sin 2x-\cos 3x=|1-2\sin x-\cos 2x|$;

ж) $\sqrt{12-5\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin x}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2\cos x$;

з) $\left(4\sin x+1+\sqrt{3+5\cos 2x-16\sin x}\right)\times(1+3\cos 2x)=0$.

5. Решите уравнение с обратными тригонометрическими функциями:

а) $2\arcsin x=\arccos 3x$;
б) $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\frac{5}{4}\pi^2$;
в) $\arcsin x\cdot\arccos x=-1$;
г) $\mathrm{arctg}(x-1)=3\,\mathrm{arctg}(x+1)$;
д) $2\arcsin x+\arccos 2x=\pi/2$;
е) $\arcsin x=2\,\mathrm{arctg}\,x$;
ж) $2\arcsin x=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;
з) $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$;
и) $\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)=\arcsin\left(\frac{2}{\pi}\arcsin x\right)$.

Публикацию подготовил А. Егоров

Информатика

Новости кубологии

Кандидат физико-математических наук

В. ДУБРОВСКИЙ,
А. КАЛИНИН

Лучшая головоломка XX века, придуманная 13 лет назад венгерским преподавателем дизайна Эрне Рубиком, упорно сопротивляется попыткам разгадать все ее тайны. Сразу после изобретения кубика Рубика начался поиск самого короткого пути к ее решению. Первые разработанные алгоритмы требовали 200—300 ходов (поворотов граней) для того, чтобы вернуть кубик в исходное состояние.

Постепенно длина алгоритмов (т. е. минимальное число ходов, гарантирующее решение) сокращалась. Это происходило за счет изменения последовательности сборки разных частей головоломки (улучшения стратегии) и применения более коротких операций для перестановки и правильной ориентации маленьких кубиков (улучшения тактики). Ставший самым популярным «послойный» алгоритм кубика Рубика («Квант», 1983, № 9) осуществляет сборку не более чем за 108 ходов). Совершенствуя его, удается уменьшить это число до 86 ходов. Дальнейшие улучшения требуют резкого увеличения количества формул, которые необходимо держать в голове или на бумаге в процессе сборки. В период всеобщего увлечения кубиком (1981—1983 гг.) редакция «Кванта» получила не менее десятка объемистых разработок, авторы которых, проделав гигантскую работу по поиску новых операций, получили алгоритмы, позволяющие решать «головоломку века» в среднем за 50—60 ходов*). Наиболее основательную работу проделал московский инженер А. Карасев, разработавший таблицы для сборки кубика из 5412 операций, разбитых на 22 группы по 246 формул в каждой группе!

*) Подчеркнем, что здесь речь идет именно о среднем числе ходов, а точнее, о числе ходов, которое обычно требовалось самим авторам алгоритмов для сборки кубика их методом.

Одновременно с любителями решать головоломку, держа ее в руках, неприступный кубик штурмовали и программисты. Сначала успеха добились менее «безумные» из них — те, кто взялись за Малый кубик размером $2\times2\times2$ кубичка. Задачу они решали с конца: исходя из правильного состояния кубика, программа начинает «разрушать» его, получая и запоминая результаты всевозможных поворотов граней. Если какая-либо расцветка кубика появляется повторно, то соответствующая операция игнорируется, так что в памяти компьютера остаются только самые короткие формулы. В результате был получен список всех возможных состояний Малого кубика с указанием, после каких поворотов граней они впервые появились. Этот список никогда не был ни опубликован, ни напечатан хотя бы в одном экземпляре. Причина не столько в его громадных размерах, сколько в том, что из-за таких размеров слишком трудно найти в списке нужную вам в данный момент операцию.

Если подсчитать количество состояний Малого кубика после определенного числа поворотов граней, то получится следующая таблица:

1 расцветка — после 0 поворотов граней,
9 расцветок — после 1 поворота граней,
54 расцветки — после 2 поворотов граней,
321 расцветка — после 3 поворотов граней,
1 847 расцветок — после 4 поворотов граней,
9 992 расцветок — после 5 поворотов граней,
50 136 расцветок — после 6 поворотов граней,
227 536 расцветок — после 7 поворотов граней,
870 072 расцветки — после 8 поворотов граней,

1 887 748 расцветок — после 9 поворотов граней,
623 800 расцветок — после 9 поворотов граней,
2 664 расцветки — после 11 поворотов граней.

Поворачивая грани 12 раз, компьютер не нашел ни одного нового состояния Малого кубика. Следовательно, чтобы решить головоломку из 8 маленьких кубичков, всегда достаточно сделать не более 11 ходов. Чаще всего хватит и 10 ходов.

Малый кубик есть не что иное, как 8 угловых кубичков классического кубика Рубика. Но в последнем — 26 кубичков, а это уже колоссально усложняет задачу перебора. Кубик Рубика может иметь $N \approx 4{,}3 \times 10^{19}$ различных расцветок. Если ваша программа будет тратить всего 1 микросекунду на получение и анализ одной расцветки, то понадобится 1,4 миллиона лет, чтобы закончить всю работу. Вот почему в начале статьи мы назвали «безумными» тех программистов, что взялись за решение этой задачи.

Из этих программистов первого впечатляющего успеха добился английский математик М. Тистлетуэйт, который разработал совершенно новый алгоритм, позволявший всегда упорядочить кубик Рубика не более чем за 52 хода («Математика волшебного кубика», «Квант», 1982, № 8). Хотя в принципе с помощью этого алгоритма можно собрать кубик и вручную, реально его может выполнить только компьютер. В дальнейшем этот алгоритм удалось несколько улучшить — сначала этого добился сам англичанин, а пару лет назад Х. Клоостерман из Голландии довел длину алгоритма до 42 ходов. Важно отметить, что эта граница обоснована строго (а не эмпирически), т. е. доказано, что из любого состояния кубика Рубика можно вернуться в правильное не более чем за 42 хода, причем данный рекордный алгоритм не может гарантировать лучшего результата. (Это не означает, что другой алгоритм не может оказаться короче.) Конечно, это доказательство существенно использует компьютер (как, например, и относительно недавнее решение знаменитой «проблемы четырех красок»): для каждого из этапов сборки был осуществлен полный перебор вариантов, число ходов, понадобившееся в худшем случае, и принимается за «длину» данного этапа.

Совсем недавно нового достижения добился немецкий математик Герберт Коцемба. Он был среди тех «менее безумных», кто 10 лет назад победили Малый кубик, но затем примкнул к «самым самым» и, возможно, уже остался единственным, кто до наших дней продолжал штурм головоломки века. Теперь к нему пришел заслуженный успех. Он разработал алгоритм и написал программу, которая решает головоломку Рубика менее чем за 21 ход! Сразу скажем, что эта оценка длины, в отличие от предыдущей, эмпирическая: все состояния кубика, которые предлагались программе Коцембы, были упорядочены не более чем за 21 ход. В частности, программа нашла более короткие решения для многих задач на составление узоров на кубике (или пасьянсов), весьма популярных в «золотую эру» кубика. Нет никакой гарантии, однако, что состояний, требующих больше 21 поворота по программе Коцембы, не существует вовсе. Более того, такую гарантию мог бы дать только полный перебор вариантов для каждого этапа программы (их два), а он пока не под силу даже программе Коцембы и его более мощному, чем у предшественников, компьютеру.

Идея алгоритма Герберта Коцембы

Собственно говоря, то, что придумал Коцемба, не является «алгоритмом сборки кубика» в том смысле, как его обычно понимают в «кубологии».

Обычные алгоритмы сборки представляют собой наборы правил, позволяющих для любого заданного состояния кубика поставить некую ближайшую цель и достичь ее, выполнив последовательность поворо-

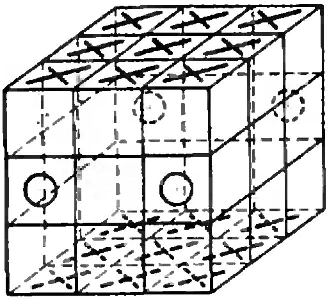


Рис. 1. Промежуточное состояние кубика Рубика.

тов граней, предписываемую правилами в данной ситуации. Тем самым кубик переводится в новое состояние, более близкое к правильному (по крайней мере, с точки зрения данного алгоритма). Например, цель может состоять в том, чтобы найти неправильно стоящий угловой кубичек и переместить его в свой угол, не трогая остальные угловые кубички. И таких маленьких шажков приходится делать очень много.

В алгоритме Коцембы ставится только одна промежуточная цель — кубик надо перевести в одно из состояний, которые так и названы — промежуточными. Они характеризуются тем, что любое промежуточное состояние можно получить из правильного (а значит, и наоборот — превратить его в правильное), поворачивая четыре боковые грани только на 180°, а верхнюю и нижнюю — на произвольный угол (естественно, кратный 90°). Более наглядное описание семейства промежуточных состояний дает специальная расцветка кубика, изображенная на рисунке 1: верхняя и нижняя грани красятся одним цветом, а на каждом из реберных кубичков горизонтального среднего слоя один из двух квадратиков красится вторым цветом; остальную поверхность кубика вообще можно не закрашивать. Первая цель (задача первого этапа) алгоритма Коцембы — восстановить такую раскраску из хаотического исходного состояния. При этом, конечно, можно пользоваться любыми поворотами. На втором этапе применяются только повороты, перечисленные выше. Легко понять, что они автоматически сохраняют нашу вспомогательную раскраску. По существу, на втором этапе происходит только установка каждого кубичка на его место. А благодаря сохранению вспомогательной раскраски правильная ориентация кубичков на своих местах будет обеспечена автоматически. Таким образом, число промежуточных состояний равно числу допустимых перестановок кубичков (т. е. перестановок, получаемых из правильной поворотами граней), при которых реберные кубички среднего слоя остаются в этом слое. Его нетрудно вычислить: четыре кубичка среднего слоя переставляются 4! способами, остальные реберные кубички — 8! способами, угловые — тоже 8! способами. Общее число всевозможных перестановок — $(8!)^2 \times \times 4!$ — нужно еще поделить пополам, чтобы выделить допустимые перестановки (см. статью «Математика волшебного кубика»). Итак, получается $N_2=(8!)^2 \cdot 4!/2 \approx 19{,}5 \cdot 10^9$ промежуточных состояний. Эта величина дает представление о порядке числа вариантов, которое должна держать в своей памяти машина, подыскивая достаточно короткую операцию для упорядочивания промежуточного состояния.

На первом же этапе программу интересует не полное описание заданного состояния кубика (т. е. не все $4{,}3 \cdot 10^{19}$ возможных вариантов), а только исходное расположение цветов вспомогательной раскраски, которое нужно привести к стандартному виду (рис. 1). Другими словами, здесь важны ориентации всех кубичков и места, занимаемые четырьмя кубичками среднего слоя. Таким образом, число N_1 вариантов, рассматриваемых на первом этапе, равно

(число допустимых ориентаций 8 угловых кубичков)×(число допустимых ориентаций 12 реберных кубичков)×(число расположений кубичков горизонтального слоя)$=3^7 \cdot 2^{11} \cdot C_{12}^4 \approx 2{,}217 \cdot 10^9$

(почему 3^7 и 2^{11}, а не 3^8 и 2^{12}, объясняется в упомянутой выше «Математике волшебного кубика»).

Естественно, $N_1 N_2$ — это общее число допустимых состояний кубика, и оно на 9 порядков больше числа N_1+N_2 вариантов, охватываемых программой. Тем не менее, даже это уменьшенное число все еще слишком велико, чтобы можно было произвести исчерпывающий перебор случаев и запомнить его результаты. Поэтому машина не знает заранее, какое решение она выдаст для введенного в нее исходного состояния кубика. Она ищет решение «в присутствии заказчика» и выдает, возможно, не кратчайший, но достаточно короткий вариант.

Отметим, что метод Коцембы также восходит к алгоритму Тистлетуэйта. Однако в последнем используются не один, а три вложенных друг в друга класса промежуточных состояний, отвечающих поэтапному сужению набора разрешенных поворотов; второй из этих трех классов и составляют промежуточные состояния Коцембы. Понятно, что если вам нужно добраться из пункта A (исходное состояние) в пункт B (правильное состояние) и по дороге обязательно посетить пункт C (промежуточное состояние), то такой путь ACB может оказаться длиннее прямого пути AB, даже если его отрезки AC и CB проходятся оптимально. А если еще и на пути из A в C надо завернуть в D, а из C в B — в дополнительное промежуточное состояние E, то получится еще более длинный путь $ADCEB$. Зато каждый из отрезков этого пути уже настолько сокращается, что полный перебор случаев становится возможным. Так и появились рекордные результаты Тистлетуэйта и Клоостермана.

Как работает программа Коцембы

Грубо говоря, Коцемба заставляет машину просматривать всевозможные цепочки поворотов, разрешенных на соответствующем этапе, и ловить момент, когда цель этого этапа будет достигнута. Однако при таком лобовом подходе объем просматриваемых вариантов был бы слишком велик. Так, первый ход можно сделать $6\times\times3=18$ способами (любую из шести граней можно повернуть на один из трех углов — $180°$, $\pm90°$), на втором и каждом из следующих ходов число способов равно 15, так как нет смысла дважды подряд поворачивать одну грань. Таким образом, возникает «дерево вариантов», от каждой ветви которого отходят пять следующих ветвей. (На самом деле, начиная с определенного момента некоторые ветви будут срастаться, потому что разные цепочки ходов могут порождать одинаковые преобразования кубика.) Число цепочек ходов длины, не превосходящей n, равно сумме геометрической прогрессии $18(1+15+...+15^{n-1})$.

Между прочим, только при $n=18$ это число превысит общее число N состояний кубика, а значит, заведомо найдутся состояния, которые нельзя упорядочить меньше чем за 18 ходов. В действительности, из-за сращивания ветвей дерева вариантов число 18 можно еще увеличить. (В свое время промелькнуло сообщение о том, что доказано существование состояний, не решаемых быстрее чем за 21 ход; впрочем, оно могло быть не вполне достоверным.) Как видим, результаты, показываемые программой Коцембы, близки к наилучшим.

Сокращения перебора Герберт Коцемба добился с помощью специальной фильтрующей программы. Она хранит определенную информацию о всех цепочках из, скажем, не более чем 8 ходов, и позволяет отсеивать состояния, которые заведомо не упорядочиваются (в смысле 1-го или 2-го этапов алгоритма) такими цепочками. Начав «сборку», компьютер настраивается выполнить первый этап за 10 ходов. Он порождает первые два хода и включает фильтр на 8 ходов; если возникшее состояние не отсеется, производится третий ход и включается фильтр на 7 ходов, и т. д. Если на каком-то шагу произойдет отсев, надо поменять предыдущий сделанный ход. Пока что для всех позиций, предлагавшихся программе,

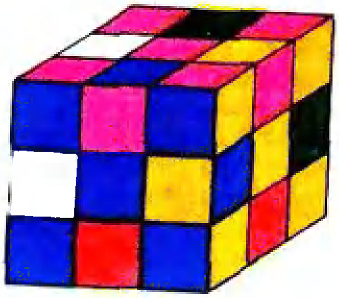


Рис. 2. Пасьянс «реверс» — все реберные кубички перевернуты на своих местах.

удавалось осуществить первый этап не более чем за 10, а второй — не более чем за 14 ходов.

Для реализации своего алгоритма Коцемба использовал персональный компьютер Atari ST с памятью 1 Мбайт и частотой 8 Мгц. Ядро программы — генератор операций с блоком проверки, написанные на Ассемблере. Размеры этого ядра — менее 500 байт! Остальные части программы, которые не оказывают существенного влияния на быстродействие, выполнены на Бейсике. В результате среднее время нахождения одного решения — 1,5 минуты (10 секунд на первый этап и 85 секунд на второй). Работа построена так: в компьютер вводят описание конкретного кубика (расположение и ориентацию всех кубичков). После этого машина ищет и запоминает лучшие (не более 13 ходов) пути для достижения промежуточного состояния, а затем для самого короткого из них включается второй этап. Если суммарная длина полученной после этого операции больше 21 хода, компьютер возвращается к этапу 1 и пытается найти более короткое решение на базе другого промежуточного состояния, возможно, увеличив длину первого этапа. Предъявляя компьютеру различные варианты запутанного кубика, Герберту всегда удавалось обнаружить операцию не длиннее 21 хода, хотя бы на это и уходило много часов работы программы.

Герберт Коцемба обратился ко всем любителям кубика с предложением присылать ему варианты запутанного кубика, к которым не удается вручную найти операции короче 21 хода. А мы в 1982—83 гг. проводили конкурс среди читателей популярного еженедельника «Собеседник» по лучшим узорам (пасьянсам) на гранях кубика Рубика. Тогда победители нашли операции короче 21 хода ко всем узорам, кроме одного (см. рис. 2), и теперь мы послали эту задачу в Дармштадт, где живет автор рекордного алгоритма.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 26)

39; *Е. Постников* (Курск) 34; *В. Регельман* (Баку) 30, 32, 39, 40; *Н. Рогачев* (Алма-Ата) 29, 30, 32—36, 39, 40; *И. Рыбаков* (Октябрьский) 30; *В. Рыбачук* (Винница) 29, 30, 32; *А. Рыскин* (Ташкент) 33, 34, 36; *Д. Савин* (Москва) 30; *С. Самсонов* (Старый Оскол) 30, 34; *В. Свириденко* (Троицк) 29—31; *А. Серафимович* (Борисов) 29, 30, 32, 33, 35, 39; *С. Симакин* (Нижний Тагил) 29; *А. Слюсаренко* (Киев) 29, 30, 32, 34, 35; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 32; *Д. Соколов* (Космодемьянск) 30; *А. Солодушкин* (Степногорск) 30; *А. Сорокин* (Москва) 29, 30; *Л. Стенюкин* (Мичуринск) 30; *А. Стехнович* (Львов) 29, 30; *А. Тарасов* (Пятигорск) 36; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 29, 30, 32; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 30, 31; *А. Тимченко* (Алма-Ата) 30; *Б. Ткаченко* (Запорожье) 30, 35, 36, 39; *В. Толпекин* (Одесса) 30, 32, 36; *С. Тумаха* (Киев) 28—32, 34—37, 39—41; *Д. Федорец* (Харьков) 28, 30, 40, 42; *Д. Федотов* (Алма-Ата) 34, 36, 39, 40; *С. Филин* (Воронеж) 30, 32; *А. Хамхидько* (Старый Оскол) 30; *Р. Хапков* (Старый Оскол) 29, 30, 33—35, 39, 42; *М. Химич* (Кузнецовск) 30, 32; *А. Хренов* (Москва) 29, 30; *П. Хрущ* (Брест) 30, 32; *Е. Цыпин* (Северодвинск) 30; *А. Черный* (Москва) 29, 30; *А. Чесноков* (Вольск) 30; *А. Чиж* (Брест) 30, 32; *С. Шаев* (с. Кулясово Атяшевского р-на) 30; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 30, 32, 34—36, 38, 39, 42; *А. Шкуренко* (Днепропетровск) 29, 30, 32, 35, 37, 39; *С. Шолдан* (Фалешты) 30; *В. Шорин* (Обнинск) 30, 32, 34, 35; *О. Шпырко* (Киев) 30, 34—37, 39—42; *И. Шумович* (Николаев) 28—31; *Д. Шумский* (Брест) 30, 32; *Д. Юдин* (Самара) 28—30, 32; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 39, 41, 42; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 29, 30, 32, 34—37, 39, 41, 42; *Д. Яроцкий* (Борисов) 29, 30, 32, 34, 35.

Информация

Новый прием в ВЗМШ на отделение «Биология»

Всероссийская заочная многопредметная школа Российской Академии образования при МГУ им. М. В. Ломоносова объявляет 20-й набор на биологическое отделение. Зачисление проводится по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе (одиннадцатилетней школы), независимо от того, в каком государстве они проживают.

Работу следует выполнить в тетради; на обложке укажите свою фамилию, имя, отчество, класс и номер школы, полный адрес с индексом. Вместе с работой пришлите стандартный конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения приемной комиссии).

В конкурсе могут участвовать также кружки, которым нужно выслать коллективно выполненную работу и заверенный печатью список членов кружка с указанием фамилии, имени, отчества руководителя и названия организации, при которой работает кружок.

Вступительное задание должно быть отправлено не позднее 31 марта 1993 года.

ВЗМШ высылает своим учащимся пособия и задания по различным разделам биологии и проверяет их работы. Обучение проводится на русском языке и длится для восьмиклассников — 3 года, для девятиклассников — 2 года.

Наш адрес: *119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ — биология.* Обязательно укажите на конверте: «Конкурс. Вступительное задание».

Школьники Москвы без выполнения конкурсной работы принимаются в вечерний биологический лекторий (справки по телефону: 433-76-29).

Вступительное задание

1. Перечислите как можно больше случаев, когда (одновременно или на разных стадиях развития) у растения: а) один и тот же орган выполняет несколько функций; б) одна и та же функция выполняется несколькими органами (структурами).

2. У многих животных отдельные особи или пары имеют индивидуальные территории. При каких условиях и из-за чего они имеют преимущества по сравнению с теми животными, у которых индивидуальных территорий нет? Приведите примеры.

3. Предложите как можно больше гипотез о том, что могло бы являться сигналом к началу осенних и весенних перелетов птиц.

Для каждой из версий предложите способы экспериментальной проверки, описав ход опытов. Какие выводы могут быть сделаны в зависимости от полученных в них результатов?

4. Профессор Выбегалло считает, что вылечить любую болезнь можно очень просто. «Каждое заболевание,— говорит он,— заключается в нехватке в организме тех или иных веществ. Вот и надо выявить дефицит с помощью анализов и прописать больному пить раствор соответствующего вещества.» Укажите случаи, когда таким приемом нельзя вылечить болезнь, и объясните причины этих случаев.

5. Возрастной состав популяций можно характеризовать графиком, по оси абсцисс которого — возраст, а по оси ординат — процент особей этого возраста в популяции. Какую форму может иметь такой график? Для каждого типа кривых приведите примеры организмов, характеризующихся этим графиком, и объясните, почему для этих организмов кривая идет именно так.

Примечание. В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и ваши собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

XXVI Межреспубликанская олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. РЕЗНИЧЕНКО

С 16 по 23 апреля в Алма-Ате, столице Казахстана, состоялся заключительный этап XXVI Межреспубликанской математической олимпиады школьников — так по взаимной договоренности республик бывшего СССР решено было в этом году назвать традиционную Всесоюзную олимпиаду школьников по математике. В очень непростое время проходил заключительный этап олимпиады, множество политических, экономических, организационных, да и просто технических проблем пришлось решать и организаторам олимпиады, и ее участникам. Так, финансовые трудности стали причиной неучастия в олимпиаде государств Балтии, сложная внутриполитическая обстановка не позволила прибыть на олимпиаду командам Грузии и Таджикистана. Тем не менее, олимпиада получилась достаточно представительной. В заключительном этапе приняли участие команды Азербайджана, Армении, Беларуси, Казахстана, Кыргызстана, Молдовы, России, Туркменистана, Узбекистана, Украины, команды Москвы и Санкт-Петербурга, учебно-научных центров и физико-математических школ при университетах Алма-Аты, Еревана, Киева, Москвы, Новосибирска, Санкт-Петербурга — всего 173 школьника (48 девятиклассников, 60 десятиклассников и 65 одиннадцатиклассников).

Как обычно, участникам олимпиады было предложено в каждом из двух туров по четыре задачи, на решение которых отводилось по пять часов. Каждая задача оценивалась в баллах с таким расчетом, чтобы суммарное число баллов в туре по каждому классу было равно тридцати (см. таблицу 1).

В целом, задания каждого тура оказались достаточно сбалансированными по трудности. Оценку творческой стороне предложенных заданий (в рамках ставшего традиционным конкурса задач) дали сами участники олимпиады, назвав в большинстве случаев задания «интересными» и «хорошими». При этом лучшими были признаны в девятом классе — задачи № 8 (I место), № 7 (II место) и № 4 (III место); в десятом — задачи № 3 (I место), № 8 (II место) и № 6 (III место); в одиннадцатом — задачи № 6 (I место), № 7 (II место), № 4 и № 5 (III—IV места).

Первая премия присуждалась в девятом классе за решение 7—8 задач, в десятом и одиннадцатом классах за решение 8 задач. Вторая премия — за решение 5—6 задач (9 класс), 5—7 задач (10 класс) и 6—7 задач (11 класс). Третья премия присуждалась девятиклассникам, набравшим по итогам обоих туров от 26 до 35 баллов, десятиклассникам, набравшим от 25 до 29 баллов, и одиннадцатиклассникам, набравшим от 35 до 42 баллов. Дипломами оргкомитета и жюри награждались школьники девятого и одиннадцатого классов, набравшие не менее 24 баллов, десятого класса — не менее 22 баллов. В таблице 2 приведены данные о количестве премий и дипломов, присужденных в каждом классе. Наиболее удачно на олимпиаде выступили среди девятиклассников — *Михаил Матвеев* (СУМЦ С.-Петербург, 60 баллов), среди десятиклассников — *Вадим Бринюк* (Украина, 58 баллов), среди одиннадцатиклассников — *Павел Кожевников* (Россия, 58 баллов).

Работа со школьниками требует много душевных сил и терпения. Только истин-

Таблица 1

Задача / Класс	1	2	3(а/б)	4	5	6	7	8
9	6	6	8	10	5	6	9	10
10	5	6	10 (6/4)	9	5	7	8	10
11	6	6	10	8	6	8	7	10

Таблица 2

Премия / Класс	9	10	11
I	5	1	2
II	8	17	14
III	12	9	17
Диплом оргкомитета и жюри	8	13	13

ным энтузиастам по плечу такая ноша. За многолетнюю работу на олимпиаде оргкомитет наградил специальным призом ветерана олипиадного движения члена жюри с 1973 года ведущего научного сотрудника Института математики АН Молдовы Бориса Ивановича Чиника.

Олимпиада — это не только решение задач, но и разнообразная культурная программа, включающая знакомство с Алма-Атой, ее историческими и архитектурными памятниками, экскурсию на Медео, посещение театра и музеев, спортивные соревнования. Олимпиада — это еще и возможность общения с близкими по интересам людьми, встреча со старыми друзьями, новые знакомства. Много сил отдали организаторы, искренне желая провести олимпиаду так, чтобы она оставила о себе добрую память. Не их вина, что не все, что было ими задумано и запланировано, удалось выполнить. По разным причинам не состоялись встреча участников олимпиады с редколлегией журнала «Квант» и ставший традицией математический бой между командой участников и командой жюри. Но в целом олимпиада получилась, и хочется сказать спасибо всем, кто на разных этапах подготовки и проведения олимпиады делал для этого все возможное.

Ниже приведены условия задач, предлагавшихся на XXVI Межреспубликанской олимпиаде по математике. Звездочкой отмечены задачи, вошедшие в «Задачник «Кванта».

Задачи

Первый день

9 класс

1. Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^4+b^4+c^2\geqslant 2\sqrt{2}\,abc.$$

В. Радченко

2. На диагонали BD квадрата $ABCD$ выбрана точка E. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABE и ADE соответственно. Докажите, что четырехугольник AO_1EO_2 — квадрат.

С. Анисов, С. Рушкин

3. Города одной империи с k столицами соединены дорогами так, что из любого города в любой другой можно проехать по этим дорогам. Докажите, что империю можно разделить на k республик так, чтобы каждая республика имела столицу и вместе с любым городом в ней содержался бы кратчайший путь из этого города до столицы (кратчайшим считается путь, состоящий из минимального числа дорог).

А. Перлин

4. На клетчатой доске лежит несколько фишек. За один ход разрешается (если это возможно) «перепрыгнуть» какой-нибудь фишкой через фишку, стоящую на соседней клетке (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону), и встать на следующую свободную клетку. При этом фишка, через которую «перепрыгнули», снимается с доски. Какое наименьшее число фишек может остаться на доске, если вначале фишки были расставлены в виде прямоугольника $m\times n$ ($m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$), окруженного свободными клетками?

И. Соловьев

10 класс

1. Докажите, что для любых чисел $a>1$, $b>1$ справедливо неравенство

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 8.$$

В. Радченко

2. Докажите, что среди любых пятнадцати различных попарно взаимно простых натуральных чисел, отличных от единицы и не превосходящих 1992, найдется хотя бы одно простое число.

Д. Терешин

3*. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом. Рассеянный кассир продал mn билетов, не следя за тем, чтобы они были проданы на разные места. Оказалось, что зрителей можно рассадить в зале так, чтобы у каждого в билете был правильно указан хотя бы один из номеров — ряда или места.

а) Докажите, что зрителей можно рассадить так, чтобы хотя бы у одного из них были правильно указаны оба номера, а для остальных выполнялось прежнее условие.

б) Какое наибольшее количество зрителей можно заведомо посадить на свои места с сохранением прежнего условия для остальных?

Е. Малинникова

4. Даны три окружности: S_1, S_2 и S. Окружности S_1 и S_2 проходят через центр O окружности S, пересекаются второй раз в точке M и пересекают окружность S: окружность S_1 — в точках C и D, окружность S_2 — в точках A и E. Прямые AD и CE пересекаются в точке B, причем $B\neq M$ (рис. 1). Докажите, что угол BMO прямой.

Л. Купцов

11 класс

1. Найдите все нули функции

$$f(x)=a\cos(x+1)+b\cos(x+2)+c\cos(x+3),$$

если коэффициенты a, b, c подобраны так, что на интервале $(0;\pi)$ этих нулей имеется по крайней мере два.

И. Воронович

2*. Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B, при-

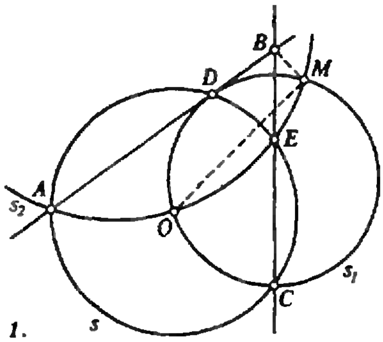


Рис. 1.

чем радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проведена произвольная плоскость, пересекающая окружность в точках X и Y. Докажите, что произведение $BX \cdot BY$ не зависит от выбора такой плоскости.

Б. Чиник

3*. Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого кубического многочлена $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a=0$. Придумайте, как с помощью этого прибора решить систему

$$\begin{cases} x=P(y), \\ y=P(x). \end{cases}$$

Д. Туляков

4*. Найдите все натуральные числа $k>1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и n, $m\neq n$, числа k^m+1 и k^n+1 получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

А. Скопенков

Второй день

9 класс

5. Существует ли четырехзначное число такое, что ни при какой замене любых трех его цифр на любые три не получится числа, делящегося на 1992?

И. Селищев, С. Конягин

6*. На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P' — точка пересечения отрезков AR и BQ. Докажите, что точки P и P' симметричны относительно прямой AB.

В. Произволов, Б. Кукушкин

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7, \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7. \end{cases}$$

Д. Митькин

8. Существуют ли натуральные числа m и n такие, что прямоугольник $m\times n$ клеток на клетчатой бумаге можно без пересечений замостить «уголками», изображенными на рисунке 2, с выполнением следующих условий:

1) никакие два «уголка» не образуют прямоугольник 3×2 клеток;

2) ни в какой точке не смыкается более трех «уголков».

Б. Кукушкин

10 класс

5. На доске выписываются числа по следующему правилу: первое число равно 1, каждое следующее число равно количеству уже написанных чисел плюс сумма квадратов этих чисел. Докажите, что на доске не может появиться полный квадрат, кроме 1.

А. Перлин

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность с центром P касается его стороны BC и продолжений стороны AB и диагонали AC. Окружность с центром Q касается его стороны CD и продолжений стороны AD и диагонали AC. Пусть K — точка касания первой окружности и прямой AB, L — точка касания второй окружности и прямой AD, M — точка пересечения прямых AB и QC, N — точка пересечения прямых AD и PC. Докажите, что $KM=NL$.

Д. Терешин

7. Каждая клетка прямоугольника $2m\times n$ покрашена в один из двух цветов (синий или зеленый) так, что имеется поровну клеток каждого цвета и при этом левая нижняя клетка — синяя, а правая верхняя — зеленая. Центры всех синих клеток соединены между собой отрезками, также отрезками соединены между собой центры всех зеленых клеток. Докажите, что можно так расставить стрелки на всех отрезках, чтобы сумма получившихся векторов равнялась нулю.

Н. Агаханов

8. Докажите, что в компании из 17 человек, в которой каждый знаком ровно с 4 другими, найдутся двое, не знакомые друг с другом и не имеющие общих знакомых.

С. Дужин

11 класс

5. Правильный треугольник со стороной 10 разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Имеется m треугольных плиток (рис. 3, *а*) и $25-m$ четырехугольных (рис. 3, *б*).

а) Можно ли замостить ими весь исходный треугольник, если $m=10$?

б) Найдите все значения m, при которых это возможно.

Е. Малинникова

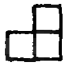


Рис. 2.

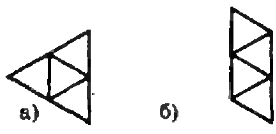


Рис. 3.

6. На плоскости нарисованы 1992 вектора. Два игрока по очереди выбирают по одному вектору до тех пор, пока они не кончатся. Проигрывает тот, у кого сумма выбранных им векторов имеет меньшую длину. Может ли начинающий построить свою игру так, чтобы не проиграть?

И. Воронович

7. Докажите, что если натуральные числа k, l, m, n удовлетворяют условиям

$$k<l<m<n,\ kn=lm,$$

то справедливо неравенство

$$\left(\frac{n-k}{2}\right)^2 \geqslant k+2.$$

Е. Малинникова

8. См. задачу 8 для 10 класса.

XXVI Межреспубликанская олимпиада по физике

А. Зильберман

С 15 по 21 апреля в г. Долгопрудном под Москвой прошла очередная физическая олимпиада — в этом году она изменила название и стала называться Межреспубликанской. Олимпиада прошла по традиционным правилам, и участвовали в ней команды большинства государств, входивших ранее в СССР. Представители этих государств собрались осенью прошлого года в Москве и решили, что при надлежащем изменении «правил игры» такие олимпиады целесообразно сохранить — польза от них очевидна, а трудности их проведения в нынешних условиях хотя и велики, но преодолимы. Был избран новый Оргкомитет, в который вошли представители всех участвующих государств, договорились о порядке финансирования соревнований — теперь в расходах уравнены все участники (раньше эти расходы покрывали хозяева олимпиады — по нынешним временам это практически невозможно), а решение всех вопросов «на будущее» оставили на потом.

Итак, большие хлопоты по проведению Межреспубликанской физической олимпиады добровольно взял на себя в этом году Московский физико-технический институт. 16 апреля состоялось торжественное открытие олимпиады, а 17 апреля прошел теоретический тур. Девятиклассникам, как обычно, было предложено 4 задачи (на 4 часа), а десятиклассникам и одиннадцатиклассникам — по 5 задач (на 5 часов). Ниже приводятся условия этих задач (часть из них традиционно попала в «Задачник «Кванта»).

Задачи теоретического тура

9 класс

1. Тяжелая цепочка, состоящая из большого числа одинаковых гладких звеньев, свободно подвешена за концы (рис. 1). Масса всей цепочки $M=0,2$ кг. Определите силы натяжения в нижней точке цепочки, а также в точке A, лежащей на половине высоты «провиса» цепочки.

2. Миниатюрный тигель (печка) для плавки металла имеет электронагреватель с постоянной мощностью $P=20$ Вт. Нагреватель включают, и после того, как температура практически перестает увеличиваться, в тигель бросают несколько кусочков олова общей массой $M=50$ г, которые начинают плавиться. На рисунке 2 приведен график зависимости температуры в тигле от времени. Определите по этим данным удельную теплоту плавления олова.

3. Электронагреватель H (рис. 3) подключают к источнику питания последовательно с амперметром и реостатом и устанавливают реостатом ток 0,1 А. Еще один резистор (его величина неизвестна) подключили между точками A и $Б$ — при этом показания амперметра уменьшились до 0,05 А. После того как этот резистор отключили и подключили между точками A и B, амперметр стал показывать 0,3 А. Найдите КПД схемы во всех трех случаях (коэффициент полезного действия схемы равен отношению мощности нагревателя к полной мощности, развиваемой источником). Источник и амперметр считайте идеальными, сопротивление нагревателя остается постоянным во всех трех случаях.

4. На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две шайбы радиусов R. Тонкая и легкая нить длиной $L=2R$ прикреплена концами к бокам шайб (рис. 4). Нить потянули за середину постоянной горизонтальной силой F. С какими силами шайбы будут давить друг на друга после того, как их движе-

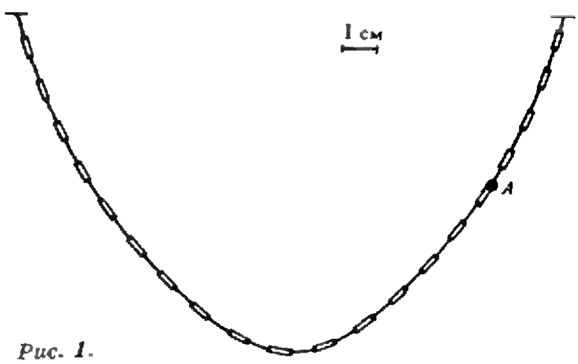


Рис. 1.

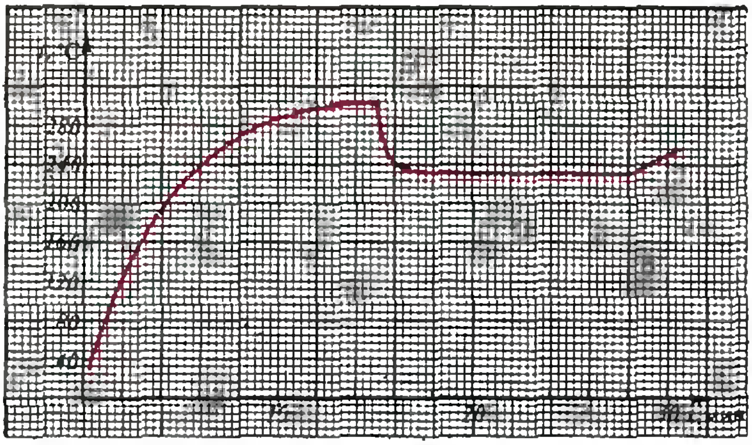


Рис. 2.

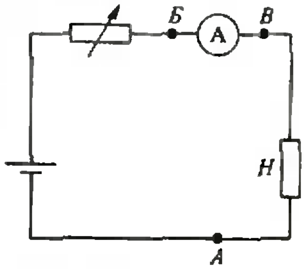


Рис. 3

ние установится? Трение считайте малым. Рассмотрите два случая: а) массы шайб одинаковы, б) массы отличаются в два раза.

10 класс

1. См. задачу 4 для 9 класса.

2. На гладком горизонтальном столе находится массивный куб, прикрепленный к концу легкой упругой горизонтальной пружины длиной $L=1$ м. Если закрепить второй конец пружины и дать грузу колебаться вдоль пружины, то из-за наличия вязкого трения колебания будут слабо затухать — за 10 полных периодов амплитуда упадет в два раза. Для поддержания неизменной амплитуды колебаний свободный конец пружины быстро сдвигают на $l=1$ мм навстречу грузу каждый раз, когда длина пружины становится минимальной, и быстро возвращают в прежнее положение каждый раз, когда длина максимальна. Найдите амплитуду установившихся колебаний. Потерями энергии в пружине пренебречь. Примечание: при затухании колебаний из-за вязкого трения энергия колебаний уменьшается за каждый период в одно и то же число раз.

3. В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем находится воздух при температуре окружающей среды. Поршень медленно поднимают на высоту H относительно положения равновесия и дожидаются, пока температура газа снова станет равной температуре окружающей среды. После этого сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На сколько он опустится к тому времени, когда его колебания прекратятся? Теплоемкостью сосуда и поршня можно пренебречь. Давление снаружи считайте малым.

4. Три маленьких шарика, массы которых m, $2m$ и $5m$, имеют заряды q, q и $2q$ соответственно и расположены вдоль одной прямой. Расстояние между соседними шариками равно a; вначале они неподвижны. Шарики отпускают. Найдите суммарную кинетическую энергию шариков после их разлета на большие расстояния. Найдите скорости шариков на большом удалении друг от друга. Считайте, что при движении шарики все время остаются на одной прямой.

5. В «черном ящике» находятся постоянный резистор и нелинейный элемент, которые могут быть включены последовательно или параллельно. Вольт-амперные характеристики для обоих этих включений приведены на рисунке 5. Найдите по этим данным сопротивление резистора, находящегося в ящике. Какой нелинейный элемент может находиться внутри?

11 класс

1. Масса Харона, недавно открытого спутника Плутона, в 8 раз меньше массы самой планеты. Плутон и Харон обращаются по круговым траекториям вокруг общего центра масс, причем они все время «смотрят друг на друга», т. е. система вращается как единое твердое тело. Расстояние между центрами тел $R=19640$ км, радиус Харона $r=593$ км. Определите относительное различие в ускорениях свободного падения для наиболее близкой к Плутону и наиболее удаленной от него точек Харона.

2. Один из спаев термопары находится в комнате при температуре $t_1=27$ °С, а второй — в теплоизолированном сосуде со льдом, имеющим температуру $t_2=0$ °С (рис. 6). Мощность, развиваемая термопарой, выделяется на сопротивлении нагревателя, который помещен в другой теплоизолированный сосуд, содержащий воду. Оцените повышение температуры воды к моменту окончания плавления льда. Считайте, что все сопротивление цепи сосредо-

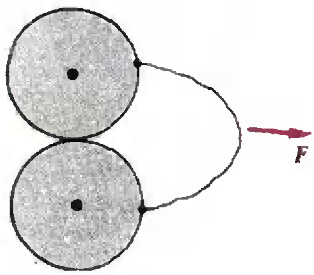


Рис. 4.

точено в нагревателе. Массы воды и льда одинаковы, теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг.

3. Заряженная частица с кинетической энергией W пролетает мимо длинного равномерно заряженного провода. Частица движется в плоскости, перпендикулярной проводу, и в результате отклоняется на небольшой угол α от первоначального направления полета (рис. 7). Найдите этот угол, если заряд частицы e, а заряд единицы длины провода q. Поле на расстоянии R от длинного провода $E=q/(2\pi\varepsilon_0 R)$.

4. Виток в форме квадрата из тонкого провода имеет индуктивность L_1 (рис. 8, *а*). Виток из того же провода, идущий по ребрам куба, как это показано на рисунке 8, *б*, имеет индуктивность L_2. Найдите индуктивность витка из того же провода, показанного на рисунке 8, *в*. Все витки на рисунках изображены красными линиями.

5. Полуцилиндр изготовлен из оптически прозрачных цилиндрических слоев с разными показателями преломления n. Полученная зависимость n от радиуса r изображена на рисунке 9 в координатах $\ln n$ и $\ln r$ (r измеряется в см). Используя данную зависимость, найдите радиусы полуокружностей, по которым сможет распространяться тонкий пучок света при нормальном падении на плоскую поверхность полуцилиндра.

18 апреля состоялся экспериментальный тур. В каждом из классов было предложено по одной задаче. Расскажем коротко о них.

В 9 классе участникам нужно было определить отношение сопротивлений двух резисторов, исследуя тепловое действие тока. Для этого использовались низковольтный источник постоянного (можно переменного) напряжения, небольшой стеклянный стаканчик для воды, вода, термометр, часы. Трудность состояла в том, что для получения хорошего результата нужно было аккуратно учитывать теплообмен с окружающей средой (при малых разностях температур теплообменом можно пренебрегать, однако измерить эти разности простым термометром можно только с большими погрешностями).

В 10 классе была задача посложнее — необходимо было измерить емкости двух конденсаторов при помощи плоской батарейки, микроамперметра, конденсатора известной емкости (2 мкФ), точного резистора (300 Ом, 1 %), специально изготовленного «реостата» — куска оголенного провода длиной около 1 м из сплава с вы-

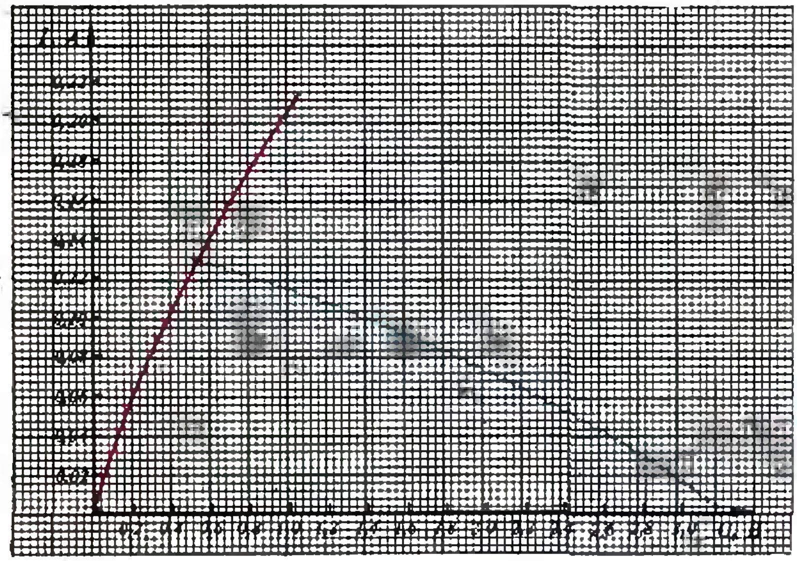


Рис. 5.

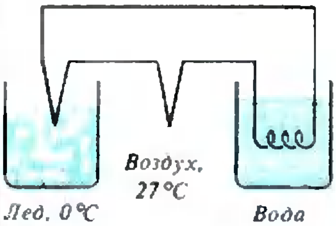


Рис. 6.

Ж контур

Рис. 7.

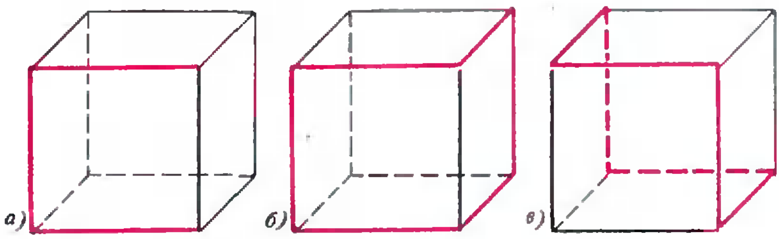


Рис. 8.

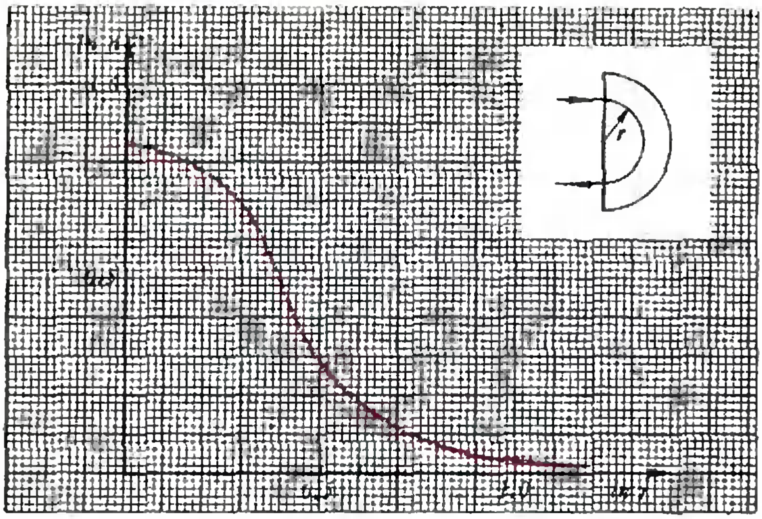


Рис. 9.

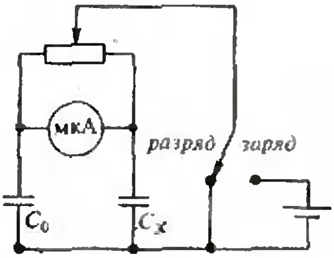


Рис. 10.

соким удельным сопротивлением (нихром), закрепленного на деревянной линейке (общее сопротивление этого куска составляло примерно 30 Ом), миллиметровой бумаги и проводов. Сложность была в том, что один из неизвестных конденсаторов имел большую емкость (~200 — 300 мкФ) и простым баллистическим методом точного результата получить не удавалось. Можно было многократно заряжать (или разряжать) этот конденсатор при помощи известного, но точность получалась довольно плохой — из-за саморазряда электролитического конденсатора большой емкости.

Наиболее точный результат можно было получить, собрав схему, в которой конденсаторы известной и неизвестной емкостей одновременно заряжаются и разряжаются через различные резисторы. В том случае, когда токи заряда и разряда будут пропорциональны величинам емкостей, напряжения на конденсаторах окажутся одинаковыми в любой момент, и этот факт можно легко зафиксировать. Одна из возможных схем такого эксперимента показана на рисунке 10. В качестве потенциометра тут используется проволочный резистор (проволока из нихрома), а провод от батарейки присоединяется к части этого потенциометра руками. Этот метод имеет хорошую чувствительность, точность измерений при больших отношениях C_x/C_0 (как в этом случае) можно существенно увеличить, добавив в одно из плеч потенциометра выданный точный резистор. Предварительно нужно измерить отношение его сопротивления к полному сопротивлению проволочного резистора — такой вопрос в задаче тоже был. Это можно сделать тоже различными способами, но самый точный из доступных в этом случае — мостиковый, проволочный резистор тут будет выступать в качестве трех резисторов этого мостика, для чего экспериментатору понадобятся обе руки (и голова, разумеется).

В одиннадцатом классе экспериментаторы изучали колебания двух тел различной формы, подвешенных на пружине. Тела эти могли колебаться в воздухе и в большой банке с водой. Пружина и тела были специально изготовлены с таким расчетом, чтобы колебания в воздухе долго не затухали (можно было наблюдать несколько сотен периодов) и было возможно измерить зависимость времени затухания от амплитуды. В случае погружения тел в воду колебания также затухали не очень сильно, и участники могли измерить изменение периода колебаний за счет вовлечения в движение некоторой массы воды (так называемая присоединенная масса). В целом эта задача требовала очень аккуратных измерений и грамотной обработки их результатов.

Большое участие в подготовке экспериментального тура приняли студенты МФТИ и МГУ — победители Всесоюзных и Международных олимпиад последних лет. Ребята собрали и проверили все комплекты оборудования и провели измерения для каждого рабочего места участников экспериментального тура. Были составлены таблицы результатов, что позволило жюри при проверке работ учитывать точность полученных участником результатов, а не только описание тех прекрасных методов, которыми он смог бы воспользоваться, если бы сумел подключить конденсатор к батарейке.

Участники олимпиады не только решали задачи. Были созданы условия для спортивных развлечений (бассейн, спортплощадки), интересным оказался студенческий концерт, состоялись посещения кафедр института и экскурсии — в общем, организаторы постарались сделать интересным и содержательным досуг участников.

На торжественном закрытии олимпиады перед участниками выступил ректор МФТИ, член-корреспондент РАН Н. В. Карлов. О своем факультете рассказал декан ФОПФ (факультета общей и прикладной физики) Ф. Ф. Каменец. Победителям были вручены дипломы и призы (в том числе и специальные — за успехи в теоретическом и экспериментальном турах, самому молодому из участников и т. д.). К сожалению, мы не сумели вовремя вручить приз имени академика И. К. Кикоина — первого главного редактора журнала «Квант». Московский девятиклассник Сергей Гуков получил его за успехи в экспериментальном туре уже после окончания олимпиады. Присутствующим на закрытии участникам раздали книги и брошюры о ФОПФ, где о прелестях этого факультета рассказано частью в эпическом, частью в юмористическом стиле.

Действующие правила приема в вузы разрешают (только разрешают!) принимать без вступительных экзаменов победителей заключительного тура олимпиады. Мы рады сообщить читателям «Кванта», что МФТИ этим разрешением воспользовался и намерен пользоваться впредь.

Перспективы Межреспубликанских физических олимпиад выглядят в настоящее время довольно туманными. Мы очень надеемся, что это хорошее дело не угаснет и у нас будет о чем рассказать читателям журнала через год.

Призеры XXVI Межреспубликанской олимпиады по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Бондарко М.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Лычак А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,
Матвеев М.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Тарасов А.— Россия, Ухта, лицей,
Хазанов А.— Санкт-Петербург, СУМЦ;

по 10 классам —

Бринюк В.— Украина, Донецк, с. ш. 35;

по 11 классам —

Кожевников П.— Россия, Калуга, с. ш. 24,
Никулин М.— Москва, СУНЦ МГУ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Богданов И.— Россия, Пермь, с. ш. 17,
Дюбина А.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Ковтун И.— Киев, ФМШ при КГУ,
Крупенин С.— Москва, с. ш. 43,
Мальков К.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Поладян В.— Ереван, ФМШ,
Соболевский С.— Беларусь, Гродно, с. ш. 1,
Шувалов В.— Москва, с. ш. 57;

по 10 классам —

Артельных И.— Россия, Челябинск, с. ш. 31,
Бендерский А.— Москва, с. ш. 57,
Бирюк А.— Россия, Краснодар, с. ш. 4,
Брюхов Е.— Россия, Челябинск, с. ш. 31,
Дудко Д.— Украина, Киев, с. ш. 61,
Замятин В.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Казанцева В.— Россия, Ижевск, с. ш. 30,
Кожанов И.— Россия, Новосибирск, с. ш. 162,
Кочерова А.— Россия, Долгопрудный, с. ш. 5,
Перлин В.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Поздняков А.— Санкт-Петербург, с. ш. 202,
Порошенко Е.— Алма-Ата, РФМШ,
Розенблюм Е.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Сапрыкин С.— Украина, Одесса, с. ш. 36,
Сосыка Е.— Россия, Краснодар, с. ш. 5,
Степанов А.— Москва, СУНЦ МГУ,
Федоров Р.— Москва, с. ш. 57;

по 11 классам —

Аринкин Д.— Украина, Харьков, с. ш. 132,
Бородин А.— Украина, Донецк, с. ш. 17,
Изместьев И.— Россия, п. Суны Кировской обл., с. ш. 2,
Карпов Д.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Кириллов М.— Россия, Новосибирск, с. ш. 20,
Климов С.— Россия, Ижевск, с. ш. 30,
Малютин А.— СПбГУ,
Некрашевич В.— Украина, Киевская обл., Ковшеватская с. ш.,
Ногин А.— Москва, с. ш. 57,
Певцова Ю.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Рабинович М.— Москва, с. ш. 57,
Фаткин С.— Москва, с. ш. 2,
Фельдман К.— Россия, п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82,
Чиликов А.— Россия, Киров, с. ш. 35.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Байдельдинов Ж.— Алма-Ата, РФМШ,
Венгеровский В.— Украина, Харьков, физико-математический лицей,
Дьяченко А.— Россия, Армавир, с. ш. 1,
Карабаш И.— Украина, Донецк, с. ш. 17,
Кострыкин С.— Россия, Ангарск, с. ш. 10.

Лапунов А.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Лебедев А.— Туркменистан, Ашгабад, с. ш. 6,
Ниукканен П.— Россия, Тула, с. ш. 73,
Норин С.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Поташник А.— Украина, Киев, с. ш. 206,
Сенцов Ю.— Россия, Калуга, с. ш. 5,
Чубаров Д.— Россия, Новосибирск, с. ш. 130;

по 10 классам —

Кептя Д.— Молдова, Бельцы, гимназия Елиненску,
Костин В.— Россия, Саратов, физико-технический лицей 1,
Кухта А.— Россия, Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 9,
Мокляк М.— Киев, ФМШ при КГУ,
Павловский И.— Россия, Омск, с. ш. 64,
Пламеневская О.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Семенов К.— Россия, Саратов, физико-технический лицей 1,
Черухин Д.— Украина, Керчь, с. ш. 1,
Яковлев Е.— Алма-Ата, РФМШ;

по 11 классам —

Аманов М.— Туркменистан, Ташауз, школа-интернат,
Бобков А.— Россия, Балаково, с. ш. 24,
Елсуфьев А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,
Зайцев С.— Россия, Тула, с. ш. 73,
Исмаилов Р.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Казанцева Е.— Россия, Екатеринбург, с. ш. 110,
Карнаух Т.— Украина, с. ш. 61,
Козлов К.— Москва, СУНЦ МГУ,
Корниенко А.— Украина, Днепропетровск, с. ш. 36,
Кузьмич С.— Беларусь, Минск, специализированная школа при БГУ,
Лавренюк Я.— Украина, Киев, с. ш. 179,
Локтев С.— Москва, ДНТТМ,
Мищенко В.— Россия, Омск, с. ш. 88,
Рымов А.— Алма-Ата, РФМШ,
Теплинский А.— Украина, Каменец-Подольский, с. ш. 7,
Хайкис Д.— Россия, Ижевск, с. ш. 30,
Хвенкин К.— Беларусь, Минск, специализированная школа при БГУ.

Физика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Гуков С.— Москва, с. ш. 54,
Кныш С.— Украина, Каменец-Подольский, с. ш. 5,
Слюсаренко А.— Украина, Киев, с. ш. 145;

по 10 классам —

Андреенко С.— Москва, с. ш. 57,
Бочкарев О.— Россия, Саратов, лицей 1,
Ольховец А.— Украина, Киев, с. ш. 206,
Цейтлин В.— Москва, с. ш. 57,
Шпырко О.— Украина, Киев, с. ш. 206;

по 11 классам —

Безруков Ф.— Москва, с. ш. 1232,
Ивченко Н.— Украина, Киев, с. ш. 145,
Мотрунич А.— Украина, Ужгород, с. ш. 1,
Ордабаев А.— Алма-Ата, РФМШ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Ковальский А.— Россия, Казань, с. ш. 131,
Конаков М.— Россия, Алатырь, с. ш. 2,
Короткий А.— Беларусь, Минская обл., Фанипольская с. ш.,
Кроковный П.— Россия, Новосибирск, с. ш. 327,
Рулева Д.— Россия, Рыбинск, с. ш. 2,
Тумаха С.— Украина, Киев, с. ш. 206;

по 10 классам —

Анисимовас Э.— Литва, Вильнюс, с. ш. 45,
Веленов Р.— Россия, Нижний Новгород, физмат. лицей,
Быков С.— Москва, с. ш. 57,
Гвоздев П.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Головатный А.— Россия, Ступино, с. ш.,
Кисловский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Крицун О.— Украина, Богородчаны, с. ш. 1,
Рыбачук В.— Украина, Винница, с. ш. 27,
Таглыбаев Т.— Тула, с. ш. 73,
Чигирев Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 556,
Якупов Р.— Украина, Кузнецовск, с. ш. 1;

по 11 классам —

Белиловский О.— Алма-Ата, РФМШ,
Горгадзе В.— Россия, Нальчик, с. ш. 19,
Гуляев Н.— Россия, Нижний Новгород, с. ш. 82,
Ковалевский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Панков С.— Тула, с. ш. 73,
Чистый А.— Беларусь, Брест, с. ш. 1,
Шутенко Т.— Украина, Мариуполь, с. ш. 41.

Дипломы III степени

по 9 классам получили —

Горяйнов А.— Россия, Липецк, с. ш. 64,
Козлов И.— Украина, Харьков, с. ш. 21,
Мозюкевич К.— Киев, ФМШ при КГУ,
Соколов Д.— Россия, Космодемьянск, с. ш. 4,
Солодов А.— Россия, Воронеж, с. ш. 15,
Стесев Д.— Тула, с. ш. 73,
Стратонников А.— Россия, Ленинградская обл., Сясьстройская с. ш.,
Табанин Д.— Россия, Архангельск, с. ш. 6,
Цыганок В.— Россия, Первоуральск, с. ш. 7;

по 10 классам —

Красновид А.— Беларусь, Гродно, с. ш. 19,
Ларькин В.— Россия, Правдинск, с. ш. 14,
Погорелов О.— Россия, Брянск, с. ш. 52,
Рукавицин В.— Молдова, Кишинев, лицей 2,
Типясев А.— Россия, Новокузнецк, с. ш. 59,
Худяков В.— Москва, СУНЦ при МГУ;

по 11 классам —

Арбатский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Булавенко С.— Киев, ФМШ при КГУ,
Ганноха А.— Украина, Киев, с. ш. 61,
Егоров Ю.— Киев, ФМШ при КГУ,
Гращенко А.— Беларусь, Могилев, с. ш. 18,
Залюбовский С.— Украина, Винница, с. ш. 17,
Июшин Б.— Тула, с. ш. 73,
Маравин Ю.— Украина, Евпатория, с. ш. 6,
Ращюс А.— Литва, Каунас, с. ш. «Саулес»,
Фролов А.— Москва, с. ш. 303,
Чиркин Д.— Россия, Грозный, с. ш. 3,
Юдин Д.— Россия, Самара, с. ш. 63.

Межгосударственная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

С 11 по 15 мая этого года в республике Беларусь, в г. Могилеве, впервые прошла Межгосударственная олимпиада по информатике. Она была организована в соответствии с международными правилами, основу которых составляет равное представительство участвующих в ней государств. Но учитывая переходный период, некоторым государствам, в том числе и Российской Федерации, разрешалось увеличить число участников до ранее установленного предела.

Практически все государства, образовавшиеся из бывшего Советского Союза, кроме Азербайджана, Таджикистана и Эстонии, прислали своих представителей на эту олимпиаду. Из двенадцати участвовавших команд наиболее многочисленными были команды Беларуси (11 человек) и России (9 человек). В составы остальных команд входили не более четырех школьников.

Как и на всех международных олимпиадах, в жюри вошли все руководители участвовавших в соревновании команд. Возглавлял жюри заведующий кафедрой Белорусского Государственного университета М. Ковалев. Олимпиадные задачи готовились научным комитетом, который представлял Ю. Корженевич. Поскольку сроки подготовки к олимпиаде были очень сжатыми, то никто из государств-участников не смог прислать своих задач. В создавшейся ситуации председателю научного комитета пришлось самому сформировать пакет задач.

Перед каждым туром олимпиады жюри осуществляло выбор одной задачи из двух предложенных на его рассмотрение. Но практически членам жюри выбирать было не из чего. Во-первых, задач всего было две, а во-вторых, задачи явно не соответствовали уровню проводимой олимпиады. В результате небольших уточнений формулировок (внесение содержательных изменений не допускалось) были выбраны следующие две задачи.

Задача первого тура

(автор Ю. Корженевич)

В прямоугольной (0, 1)-матрице размером $N \times M$ (N — число строк, M — число столбцов; $N = 1, 2, \ldots, 15$; $M = 1, 2, \ldots, 15$) подсчитайте число изолированных 0-областей, т. е. областей, состоящих из одних нулей, имеющих соседние нули по горизонтали, вертикали или диагонали (0-область может состоять только из одного нулевого элемента). Например, для такой (0, 1)-матрицы, как на рисунке

0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0

число изолированных 0-областей равно 3.

Задача второго тура

(автор Ю. Корженевич)

На острове Новой Демократии каждый из его жителей организовал партию, которую сам и возглавил. Ко всеобщему удивлению, даже в самой малочисленной партии оказалось не менее двух человек. К сожалению, финансовые трудности не позволили создать парламент, куда вошли бы, как предполагалось по Конституции острова, президенты всех партий.

Посовещавшись, островитяне решили, что будет достаточно, если в парламенте будет хотя бы один член каждой партии.

Помогите островитянам организовать такой как можно более малочисленный парламент, в котором будут представлены члены всех партий.

Исходные данные: каждая партия и ее президент имеют один и тот же порядковый номер от 1 до N ($4 \leqslant N \leqslant 150$). Вам даны списки всех N партий острова Новой Демократии. Выведите предлагаемый Вами парламент в виде списка номеров его членов. Например, для четырех партий:

Президенты	Члены партий
1	2, 3, 4
2	3
3	1, 4, 2
4	2

Список членов парламента: 2 (состоит из одного члена).

Примечание. Получите список одного, как можно более малочисленного, на ваш взгляд, парламента.

На решение задачи в обоих турах участникам олимпиады отводилось по четыре часа. Каждому школьнику предоставлялся персональный компьютер IBM PC и соответствующая система программирования. Большинство участников писали программы в рамках систем Turbo Pascal и Basic.

Оценка результатов решения задач на этой олимпиаде существенно отличалась от предыдущих всесоюзных олимпиад. Во-первых, тестирование программ происходило в присутствии самих школьников. Во-вторых, интересы участников в дальнейших обсуждениях их результатов защищал руководитель команды. В-третьих, проверка заданий велась параллельно руководителями команд и координаторами.

В целом, такой порядок проверки давно уже принят на международных олимпиадах по информатике. Применение его на наших олимпиадах оказалось вполне оправданным, и если в дальнейшем устранить некоторые привнесенные «свои» особенности, то его можно будет успешно использовать и в дальнейшем.

Задача каждого тура оценивалась исходя из 100 баллов. Результаты тестирования первого тура показали, что уровень подготовки участников олимпиады оказался существенно выше сложности предложенной задачи. Достаточно сказать, что максимально возможное число баллов — 90 (из оставшихся десяти баллов 5 баллов было в распоряжении жюри и 5 баллов — у координаторов) набрали 45 человек из 56 участвовавших школьников, причем среди них были даже учащиеся 8 и 9 классов. Более того, многие участники сдали свои работы гораздо ранее времени окончания тура.

В создавшейся ситуации жюри олимпиады оказалось в трудном положении. Фактически, победителей можно было определить только по результатам второго тура. Однако и здесь семь человек получили одинаковые баллы. Пришлось принимать во внимание субъективные факторы, и если члены жюри отнеслись к этому ответственно, то оценки некоторых координаторов вызывали, мягко говоря, удивление. Были даже случаи, когда жюри в результате голосования выставляло максимально возможный балл, в то время как координатор — минимально возможный, и наоборот.

В итоге дипломами I степени было награждено 7 участников, набравших 185—193 балла. Дипломы II степени получили 9 школьников с 170—180 баллами. Восемь участников, набравшие 151—165 баллов, получили дипломы III степени.

Организаторы олимпиады сделали все возможное, чтобы это событие надолго осталось в памяти ребят. И им это удалось. Отрадно, что в числе призеров олимпиады оказалось большое количество учащихся 9—10 классов, а девятиклассник из Беларуси *Максим Кузьмин* набрал наилучшую сумму баллов и получил первый приз — радиоприемник фирмы «Филлипс». Наилучшим среди учащихся одиннадцатых классов был *Евгений Кузнецов* из команды России. Приз лучшей участнице олимпиады вручен школьнице из Казахстана *Айман Мукановой*.

Призеры Межгосударственной олимпиады по информатике

Дипломы I степени

по 8—10 классам получили

Белый В.— Беларусь,
Кузьмин М.— Беларусь,
Тин Л.— Узбекистан;

по 11 классам —

Амбайнис А.— Латвия,
Вашкевич М.— Беларусь,
Иоффе С.— Россия,
Кузнецов Е.— Россия.

Дипломы II степени

по 8—10 классам получили

Аширов Ш.— Узбекистан,
Гафуров С.— Беларусь;

по 11 классам —

Буртылев М.— Беларусь,
Давыдок Д.— Россия,
Жуков Д.— Россия,
Журов Д.— Беларусь,
Куджма Д.— Литва,
Муканова А.— Казахстан,
Россиев А.— Россия.

Дипломы III степени

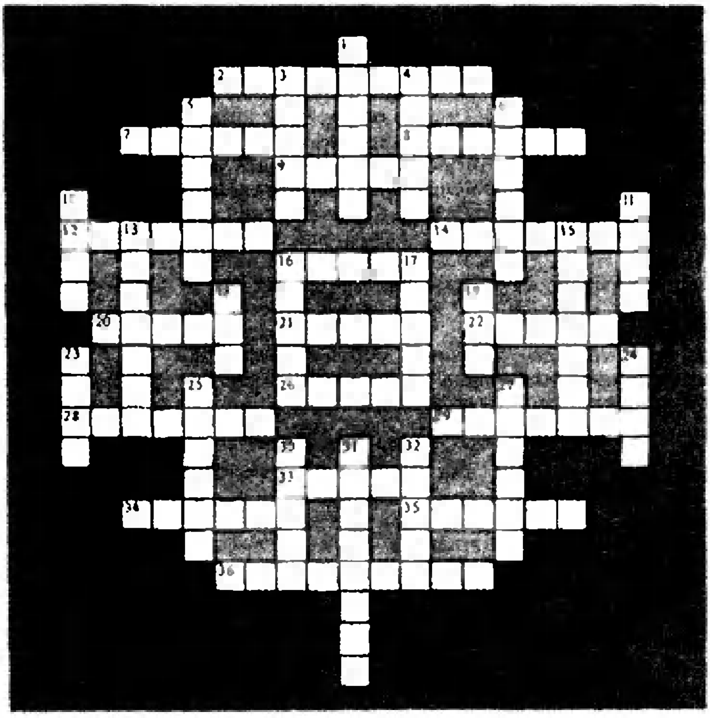
по 8—10 классам получили

Глошвили Г.— Грузия,
Луценко А.— Туркменистан;

по 11 классам —

Врабие В.— Молдова,
Галванс А.— Латвия,
Зверович А.— Беларусь,
Лапин П.— Россия,
Шафиров М.— Казахстан,
Школьник В.— Беларусь.

Кроссворд



По горизонтали:

2. Переход вещества из жидкого состояния в газообразное. 7. Немецкий физик, экспериментально определивший удельный заряд катодных лучей. 8. Единица электрической проводимости. 9. Металл, используемый для пайки, лужения. 12. Число оборотов в единицу времени. 14. Прибор для регулирования тока в цепи. 16. Единица электрического напряжения. 20. Единица кинематической вязкости. 21. Двучлен. 22. Единица магнитной индукции. 26. Система однотипных элементов, служащая для структурного преобразования направленного светового пучка. 28. Положение, в котором отражена некоторая закономерность. 29. График зависимости объема газа от температуры. 33. Химический элемент, не имеющий долгоживущих изотопов. 34. Геометрическая фигура. 35. Поверхность, описываемая в пространстве мгновенной осью вращения. 36. Соотношение величин.

По вертикали:

1. Частица, входящая в состав атомного ядра. 3. Движущаяся масса жидкости, газа. 4. Устройство для перекачивания жидкостей, газов. 5. Гидроакустический прибор. 6. Направленный отрезок. 10. Оптический прибор. 11. Мельчайшая частица химического элемента. 13. Раздел механики. 15. Устаревшее название энергетической характеристики процесса теплообмена. 16. Единица магнитного потока. 17. Окраска звука. 18. Деталь машин и механизмов. 19. Буква греческого алфавита. 23. Оптический прибор. 24. Планета Солнечной системы. 25. Ферромагнитный металл. 27. Английский физик. 30. Советский физик, один из создателей квантового генератора. 31. Химический элемент, имеющий радиоактивные изотопы. 32. Начало полета ракеты.

Составил Е. Кривощёков

(Начало см. на с. 39)

$$g(r) = g_0\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{r}{R_З} - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}-1\right)\left(\frac{r}{R_З}\right)^2\right).$$

Исследуя эту функцию с помощью производной, получим, что $g = g(r)$ возрастает при $0 < r < \frac{\varrho_0 R_З}{2(\varrho_0-\varrho)} = 0{,}88R_З$, убывает при

$$\frac{\varrho_0 R_З}{2(\varrho_0-\varrho)} < r < R_З,$$

имеет наибольшее значение $\frac{g_0\varrho_0^2}{4\varrho(\varrho_0-\varrho)} = 1{,}015g_0 = 9{,}957$ м/с^2 при $r = \frac{\varrho_0 R_З}{2(\varrho_0-\varrho)} \approx 0{,}88R_З = 5606$ км.

Посмотрите еще раз в таблицу, и вы увидите, что модель линейного убывания плотности Земли дает значительно лучшее согласие с опытом, чем модель однородной Земли.

В. Дроздов

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи по физике

1. Скорость каждой точки обода складывается из скорости поступательного движения v и линейной скорости вращательного движения. Из того, что скорость точки C (мгновенной оси вращения) равна нулю, следует, что линейная скорость тоже равна v. Тогда (рис. 1) для точки A суммарная скорость будет равна $2v$, а скорости точек B и D одинаковы по модулю и равны $\sqrt{2}\,v$.

2. Вращательное движение обруча можно заменить поступательным движением точек его обода. Поэтому можно записать:

$$v=\omega_0 R=at,\quad l=v^2/(2a)=(\omega_0 R)^2/(2a),$$

где $a=\mu g$. Отсюда для времени движения и для числа оборотов получаем

$$t=\frac{\omega_0 R}{\mu g},\quad N=\frac{l}{2\pi R}=\frac{\omega_0^2 R}{4\pi\mu g}.$$

3. В нашем случае сила трения скольжения не может превышать

$$F_{\text{тр max}}=\mu N=\mu mg=1\ \text{Н}.$$

Это означает, что в первом случае тело покоится и на него действует сила трения покоя, равная внешней силе:

$$F_{\text{тр}1}=F_1=0{,}5\ \text{Н}.$$

Во втором случае тело движется ускоренно, а сила трения равна максимальной силе трения скольжения:

$$F_{\text{тр}2}=F_{\text{тр max}}=1\ \text{Н}.$$

4. Сила тяжести, действующая на тело массой m, находящееся на сферической планете радиусом R и плотностью ρ, равна

$$F_{\text{т}}=G\frac{(4/3\,\pi R^3\rho)m}{R^2}=\frac{4}{3}\pi\rho GRm,$$

где G — гравитационная постоянная. На полюсе вес тела по модулю равен силе тяжести, а на экваторе он меньше на величину $\omega^2 Rm=4\pi^2 Rm/T^2$. Таким образом, получаем

$$\frac{4\pi^2 Rm}{T^2}=0{,}1\cdot\frac{4}{3}\pi\rho GRm,$$

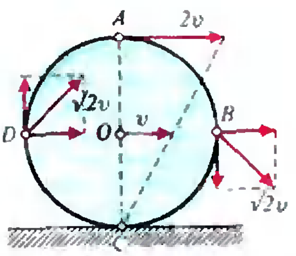


Рис. 1.

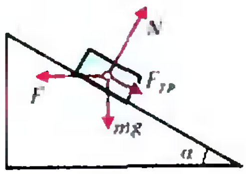


Рис. 2.

откуда

$$\rho=\frac{30\pi}{GT^2}\approx 1{,}7\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3.$$

5. Изобразим силы, действующие на брусок, и запишем условие равномерного движения бруска вверх по плоскости в проекциях на направления вдоль плоскости и перпендикулярно ей (рис. 2):

$$F\cos\alpha-mg\sin\alpha-F_{\text{тр}}=0,$$

$$N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0,$$

где $F_{\text{тр}}=\mu N$.

Отсюда находим

$$F=mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx 21\ \text{Н}.$$

6. Плотность сухого воздуха равна

$$\rho_1=\frac{M_{\text{в}}p}{RT},$$

где $M_{\text{в}}=29$ г/моль — молярная масса воздуха. Плотность влажного воздуха складывается из плотности водяных паров и сухого воздуха:

$$\rho_2=\rho_{\text{п}}+\rho_{\text{в}}=\frac{M_{\text{п}}p_{\text{п}}}{RT}+\frac{M_{\text{в}}p_{\text{в}}}{RT},$$

где $M_{\text{п}}=18$ г/моль — молярная масса водяного пара, $p_{\text{п}}$ и $p_{\text{в}}$ — парциальные давления пара и воздуха соответственно. При влажности φ давление $p_{\text{п}}$ связано с давлением насыщенных паров $p_{\text{н}}$ ($p_{\text{н}}=5{,}6$ кПа) соотношением

$$\varphi=\frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{н}}}100\ \%,$$

а давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений пара и воздуха:

$$p=p_{\text{п}}+p_{\text{в}}.$$

Тогда окончательно

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=1-\frac{p_{\text{н}}(M_{\text{в}}-M_{\text{п}})\varphi/100\ \%}{M_{\text{в}}p}\approx 0{,}98.$$

7. Во втором случае больше, так как при расширении газа совершается работа. Заметим кстати, что теплоемкость газа в первом случае называют теплоемкостью при постоянном объеме, а во втором — теплоемкостью при постоянном давлении. Легко показать, что для одного моля газа

$$C_p-C_V=R.$$

8. Отвод тепла от нагретого тела происходит тем быстрее, чем больше разность температур между телом и окружающей средой. Поэтому выгоднее сначала остудить воду, а потом положить лед.

9. Энергия, выделяемая нагревателем, идет на нагревание всей воды до температуры кипения $t_{\text{к}}=100\ ^\circ$C и на превращение части воды массой Δm в пар:

$$N\tau=cm(t_{\text{к}}-t)+\Delta m\lambda,$$

где c — удельная теплоемкость воды, λ — удельная теплота парообразования. Оставший-

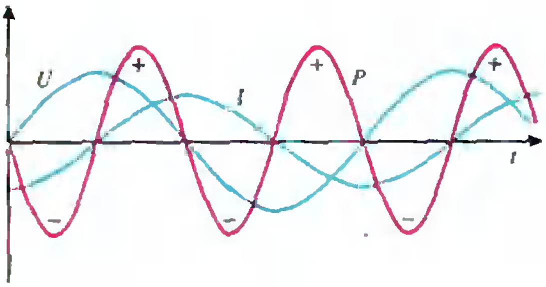


Рис. 3.

ся пар займет объем, равный

$$V=hS=\frac{\Delta mRT_{\text{к}}}{pM},$$

где h — высота поднятия поршня, M — молярная масса воды. В результате получаем

$$h=\frac{(N\tau-cm(t_{\text{к}}-t))RT_{\text{к}}}{\lambda pMS}\approx 1{,}4\ \text{м}.$$

10. Предположим, что при нагревании весь лед превратился сначала в воду, а затем в пар. Тогда относительная влажность будет равна

$$\varphi=\frac{p}{p_{\text{н}}}100\ \%=\frac{mRT}{MVp_{\text{н}}}100\ \%=10\ \%,$$

где $p_{\text{н}}=10^5$ Па — давление насыщенного пара при 100 °C. Полученный результат не противоречит здравому смыслу, следовательно, наше предположение правильное.

11. Действующее значение переменного напряжения — это значение такого постоянного напряжения, при котором на некотором сопротивлении выделяется то же количество теплоты, что и при переменном напряжении, за то же время:

$$\frac{U^2}{R}T=\frac{U_0^2}{R}\tau,$$

откуда

$$U=U_0\sqrt{\tau/T}.$$

12. При работе батареи по катушке идет ток $I=\mathscr{E}/r$ и в ней запасается энергия

$$W=\frac{LI^2}{2}=\frac{L\mathscr{E}^2}{2r^2}.$$

После отключения батареи в контуре возникают колебания. Напряжение на конденсаторе будет максимальным, когда вся энергия колебаний сосредоточена в конденсаторе:

$$W=\frac{CU_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда

$$U_{\max}=\frac{\mathscr{E}}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}=1{,}6\cdot 10^4\ \text{В}.$$

13. Мгновенная мощность равна произведению тока на напряжение (рис. 3). Средняя за период мощность равна нулю.

14. С одной стороны, ЭДС индукции, возникающая во вторичной катушке, пропорциональна магнитному потоку, который, в свою очередь, пропорционален напряжению первичной катушки. С другой стороны, в силу симметричности сердечника, через вторичную катушку проходит лишь половина потока, возбуждаемого первичной катушкой. Следовательно, на зажимах катушки I во втором случае будет напряжение, равное 10 В.

15. Поскольку конденсаторы соединены параллельно, частота колебаний в контуре равна

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}\approx 3{,}3\cdot 10^5\ \text{с}^{-1}.$$

Это соответствует излучаемой длине волны

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}=5650\ \text{м},$$

где c — скорость света.

Треугольники и катастрофы

4. См. рисунок 4.

5. См. рисунок 5. Можно провести прямые в таком порядке, что синий треугольник будет соответствовать трем большим треугольникам, т. е. от каждого большого треугольника останется один и тот же треугольный кусочек. Все попытки найти в общем виде взаимно-однозначное соответствие между большими треугольниками и треугольными кусочками не увенчались успехом.

6. См. рисунок 6. Удаление синей прямой не уменьшает числа треугольников.

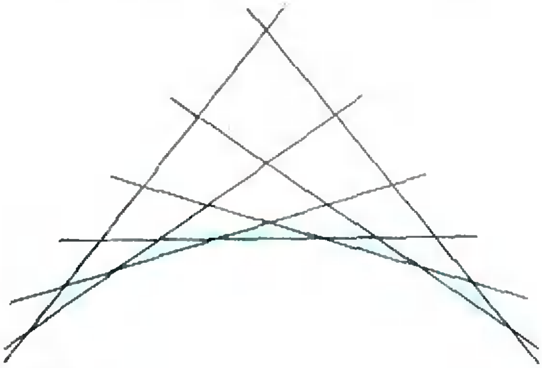


Рис. 4.

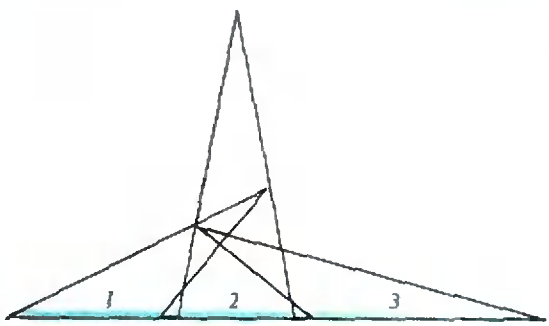


Рис. 5.

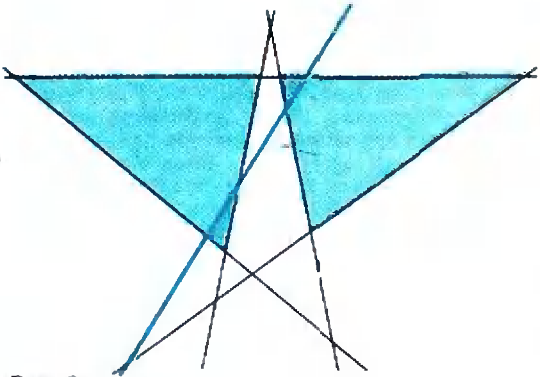


Рис. 6.

Кроссворд

По горизонтали: 2. Испарение. 7. Вихерт. 8. Сименс. 9. Олово. 12. Частота. 14. Реостат. 16. Вольт. 20. Стокс. 21. Бином. 22. Тесла. 26. Растр. 28. Правило. 29. Изобара. 33. Астат. 34. Эллипс. 35. Аксоид. 36. Равенство.

По вертикали: 1. Протон. 3. Поток. 4. Насос. 5. Эхолот. 6. Вектор. 10. Очки. 11. Атом. 13. Статика. 15. Теплота. 16. Вебер. 17. Тембр. 18. Ось. 19. Эта. 23. Лупа. 24. Уран. 25. Никель. 27. Томсон. 30. Басов. 31. Стронций. 32. Старт.

XXVI Межреспубликанская олимпиада по математике

9 класс

1. Дважды применяя неравенство $x^2+y^2\geqslant 2xy$, получаем требуемое: $(a^4+b^4)+c^2\geqslant 2a^2b^2+c^2=(\sqrt{2}ab)^2+c^2\geqslant 2\sqrt{2}abc$.

2. Первое решение. По теореме синусов из $\triangle ABE$ находим $AE=2O_1A\sin\angle ABE=\sqrt{2}O_1A$ (см. рис. 7). Аналогично, из треугольника ADE имеем $AE=\sqrt{2}O_2A$. Отсюда $O_1A=O_1E=O_2A=O_2E$, следовательно, AO_1EO_2 — ромб. Осталось заметить, что $\angle AO_1E=2\angle ABE=90^\circ$.

Второе решение. Так как $O_1A=O_1E$, $O_2A=O_2E$, то треугольники AO_1O_2 и EO_1O_2 равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle O_1AO_2=\angle O_1EO_2$. Из равенств $\angle AO_1E=2\angle ABE=90^\circ$ и $\angle AO_2E=2\angle ADE=90^\circ$ получаем, что $\angle O_1AO_2=\angle O_1EO_2=90^\circ$. Таким образом, AO_1EO_2 — прямоугольник, симметричный относительно диагонали O_1O_2, т. е. квадрат.

3. Объявим каждую из k столиц столицей республики. Затем рассмотрим все города, соединенные со столицей одной дорогой и присоединим их к тем республикам, со столицами которых они соединены (если таких столиц несколько, выберем любую из них). Далее, берем города, еще не вошедшие ни в одну из республик и соединенные одной дорогой с каким-либо городом какой-нибудь республики, и распределяем их между республиками, с которыми они соединены (все равно как).

Так как из любого города в любой можно проехать, то за конечное число шагов все города будут распределены по республикам. Заметим, что если город был приписан к республике на n-м шаге, то путь от него до любой из столиц составляет не менее n дорог, причем один из путей в n дорог содержится в той республике, к которой присоединен город. Таким образом, построенное разбиение городов на республики удовлетворяет требуемым условиям.

4. Ответ: 2, если mn делится на 3; 1 — в противном случае.

Покажем сначала, как можно добиться того, чтобы на доске осталось указанное число фишек. Если на доске имеется фрагмент, приведенный на рисунке 8 (или полученный из него поворотом, симметрией), то можно удалить из него горизонтальный ряд из трех фишек (убедитесь в этом).

С помощью описанного приема прямоугольник из фишек $m\times n$, где $m\geqslant 4$, $n\geqslant 2$, можно свести к прямоугольнику $(m-3)\times n$. Действительно, если $n\geqslant 3$, то можно удалить фишки в отмеченных прямоугольниках 3×1 в порядке, указанном стрелкой на рисунке 9. Если же $n=2$, то требуемое удаление фишек достигается с помощью ходов (см. рис. 10) $a1:b1$, $a2:b2$, $c1:c2$, $a4:a3$, $c3:b3$, $a2:a3$.

Таким образом, любой прямоугольник $m\times n$ ($m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$) можно свести к одному из шести прямоугольников: 1×2, 2×2, 4×4, 1×3, 2×3, 3×3. Нетрудно указать способ, приводящий к одной фишке для первых трех

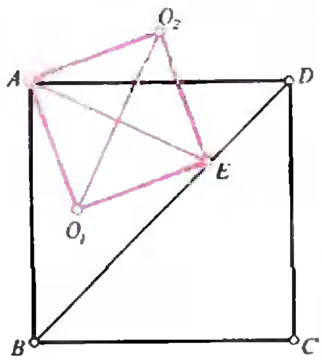


Рис. 7.

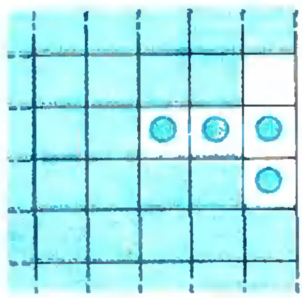


Рис. 8.

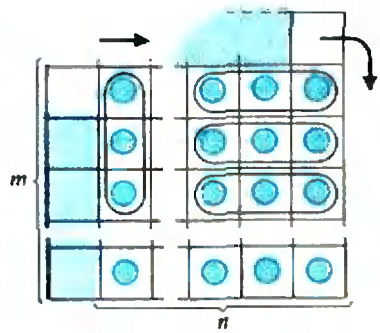


Рис. 9.

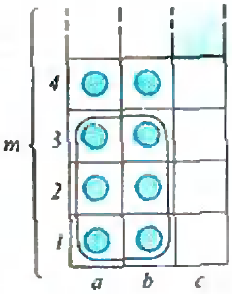


Рис. 10.

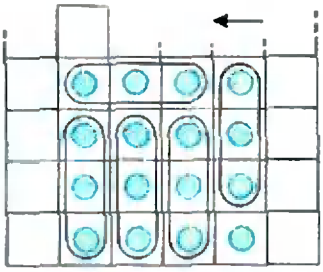


Рис. 11.

A	B	C	A
B	C	A	B
C	A	B	C

Рис. 12.

прямоугольников и к двум — для последних трех. Например, для прямоугольника 4×4 это достигается путем последовательного удаления фишек в отмеченных на рисунке 11 прямоугольниках 3×1.

Покажем теперь, что меньшее число фишек оставить нельзя. Действительно, в любом случае на доске останется не менее одной фишки. Пусть mn делится на 3. Докажем, что в этом случае останется по крайней мере две фишки. Раскрасим клетки доски в три цвета: A, B, C (рис. 12). Любой прямоугольник 3×1 содержит по одной клетке каждого цвета, и в начальный момент на клетках каждого цвета стоит поровну фишек. За один ход на клетках какого-то одного цвета добавляется одна фишка, а с клеток двух других цветов снимается по фишке. Поэтому после любого хода количества фишек на клетках каждого цвета имеют одинаковую четность. Если же на доске останется одна фишка, то это условие нарушится.

5. Ответ: существует. Имеется всего 6 четырехзначных чисел (включая 0), делящихся на 1992: 0000, 1992, 3984, 5976, 7968, 9960. Достаточно поэтому взять число, у которого ни одна из цифр не совпадает ни с одной из цифр выписанных чисел, стоящих на соответствующих местах (например, 2111).

6. Решение этой задачи (задача М1371) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

7. Ответ: $x=y=0$, $x=y=-1$.

Указание. Докажите, что при $x\neq y$ система решений не имеет.

8. Ответ: не существуют. Предположим противное. Если в замощении прямоугольника $m\times n$ какой-либо уголок примыкает к краю прямоугольника стороной одной клетки, то он неизбежно должен быть дополнен другим «уголком» до прямоугольника 3×2. Следовательно, каждый «уголок» примыкает к краю прямоугольника по сторонам двух клеток, а прямоугольник имеет четные размеры $2n\times2k$. Так как каждый «уголок» имеет 6 вершин, то всего у «уголков», покрывающих прямоугольник, будет $\frac{2n2k}{3}\cdot6=8nk$ вершин. Подсчитаем теперь количество вершин всех уголков другим способом. В каждом узле клетчатой бумаги внутри прямоугольника, как следует из условия задачи, смыкается не более 2 вершин, на стороне длины $2n$ — не более $2(n-1)$ вершин, в углах прямоугольника — по 1 вершине. Всего — не более

$$2(2n-1)(2k-1)+2\cdot2(n-1)+2\cdot2(k-1)+4=\\=8nk-2<8nk$$

вершин. Противоречие. Значит, натуральные числа m и n, удовлетворяющие условию задачи, не существуют.

10 класс

1. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\cdot\frac{b^2}{a-1}}=\\=2\frac{a}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b-1}}.$$

Остается заметить, что при $x\geqslant1$ справедливо неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}}\geqslant2.$$

2. Пусть n_1, n_2, ..., n_{15} — числа, удовлетворяющие условию задачи. Предположим, что все они являются составными. Обозначим через p_i наименьший простой делитель числа n_i, через p — наибольшее из чисел p_1, p_2, ..., p_{15}. В силу попарной взаимной простоты чисел n_1, n_2, ..., n_{15} числа p_1, p_2, ..., p_{15} все различны. Поэтому справедливо неравенство $p\geqslant47$ (47 — пятнадцатое по счету простое число). Но тогда для того числа n, для которого число p — наименьший простой делитель, имеем

$$n\geqslant p^2\geqslant47^2>1992.$$

Противоречие.

3. Решение этой задачи (задача М1375) будет

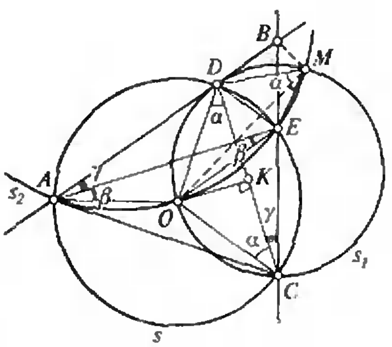


Рис. 13.

опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

4. Пусть OK — высота треугольника COD (рис. 13). Так как $\angle BMO=\angle BMD+\angle DMO$, то утверждение задачи будет доказано, если мы установим, что

$$\angle DMO=\angle KCO, \quad (1)$$

$$\angle BED=\angle COK, \quad (2)$$

$$\angle BMD=\angle BED. \quad (3)$$

Первое равенство следует из того, что углы DMO и DCO — вписанные, опирающиеся на дугу DO окружности S_1. Так как четырехугольник $DECA$ вписанный, то $\angle BED=\pi-\angle DEC=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC=\angle COK$, что доказывает равенство (2).

Докажем равенство (3). Для этого достаточно доказать, что точки B, M, E и D лежат на одной окружности, или, что равносильно, что $\angle DME=\angle DBE$. Покажем, что оба эти угла равны $\alpha+\beta$, где $\alpha=\angle DCO$, $\beta=\angle OAE$. По свойству вписанных углов $\angle DME=\angle DMO+\angle OME=\angle DCO+\angle OAE=\alpha+\beta$. Угол ADC — внешний для треугольника CDB, поэтому $\angle ADC=\angle DBC+\angle BCD=\angle DBE+\gamma$, где $\gamma=\angle BCD=\angle ECD=\angle EAD$. С другой стороны, $\angle ADC=\angle ADO+\angle ODC=\angle OAD+\angle DCO=\angle OAE+\angle DAE+\angle DCO=\beta+\gamma+\alpha$. Таким образом, $\angle DBE+\gamma=\angle ADC=\beta+\gamma+\alpha$, откуда $\angle DBE=\alpha+\beta$. Значит, $\angle DBE=\alpha+\beta=\angle DME$. Отсюда, как отмечалось, следует равенство (3).

5. Пусть x_n — число, выписываемое на n-м шаге. Тогда $x_1=1$, $x_{n+1}=n+x_1^2+\ldots+x_n^2$ при $n\geqslant 1$. Отсюда следует, что $x_2=2$ и $x_{n+1}=x_n^2+x_n+1$ при $n\geqslant 2$. Таким образом, при $n\geqslant 1$ справедливы неравенства

$$x_n^2<x_{n+1}<(x_n+1)^2,$$

показывающие, что при $n\geqslant 1$ число x_{n+1} не может быть полным квадратом.

6. Покажем, что обе окружности касаются прямой AC в одной и той же точке S (рис. 14). Действительно, из теорем о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что первая окружность касается прямой AC в точке S_1 такой, что $AS_1=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$, а вторая окружность — в точке S_2 такой, что $AS_2=\frac{1}{2}(AD+CD+AC)$. Но $AD=BC$ и $AB=CD$, поэтому $S_1=S_2=S$.

Так как биссектрисы смежных углов SCD и ACD взаимно перпендикулярны, а биссектрисы углов ACD и BAC параллельны, то биссектрисы CQ и AP углов SCD и BAC взаимно перпендикулярны. Следовательно, треугольник AMC равнобедренный: $AM=AC$. Аналогично доказывается, что $AN=AC$, и, значит, $AM=AN$. По теореме об отрезках касательных $AK=AS=AL$, поэтому $KM=AK-AM=AL-AN=NL$, что и требовалось доказать.

7. Пусть $N=mn$. Рассмотрим два случая: а) N — нечетно и б) N — четно.

а) Покажем, что в этом случае можно добиться того, чтобы сумма всех «синих» векторов была равна нулю. Занумеруем произвольно центры синих клеток: A_1, ..., A_N и расставим стрелки следующим образом: $A_n\to A_{n+k}$, если k нечетно, и $A_{n+k}\to A_n$, если k четно. Тогда множество всех «синих» векторов распадается на циклы (замкнутые ломаные): $A_1\to A_2\to A_3\to\ldots\to A_N\to A_1$, $A_1\leftarrow A_3\leftarrow A_5\leftarrow\ldots\leftarrow A_N\leftarrow A_2\leftarrow A_4\leftarrow\ldots\leftarrow A_{N-1}\leftarrow A_1$, $A_1\to A_4\to\ldots$, $A_2\to A_5\to\ldots$ (если эта цепочка не встретится ранее) и т. д. Сумма векторов по каждому циклу равна нулю, следовательно, равна нулю сумма всех «синих» векторов. Так же сделаем равной нулю сумму всех «зеленых» векторов, и тогда сумма всех векторов будет равна нулю.

б) Обозначим через A и B центры левой нижней и правой верхней клеток прямоугольника, через A_1, ..., A_{N-1} и B_1, ..., B_{N-1} — центры остальных соответственно синих и зеленых клеток. Расставим стрелки на отрезках, соединяющих между собой точки A_1, ..., A_{N-1}, так как описано в пункте а). Так же поступим с точками B_1, ..., B_{N-1}. Кроме того, введем векторы $\vec{AA_i}$ и $\vec{BB_i}$, где $i=1$, ..., $N-1$.

Пусть C и D — центры любых двух симметричных относительно центра прямоугольника клеток. Если эти клетки разного цвета, например C — центр синей клетки, D — центр зеленой клетки, то $\vec{AC}+\vec{BD}=\vec{0}$, поскольку $ACBD$ — параллелограмм (рис. 15). Если же эти клетки одного цвета, например обе синие, то $\vec{AC}+$

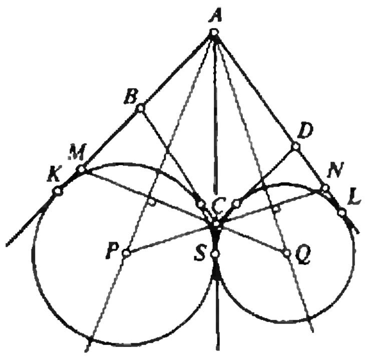


Рис. 14.

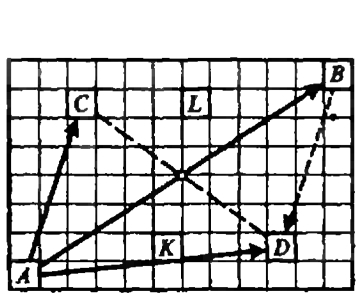


Рис. 15.

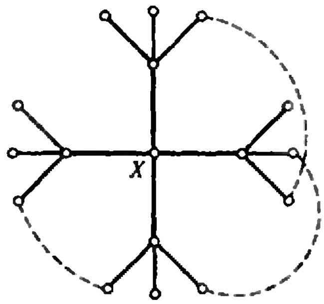


Рис. 16.

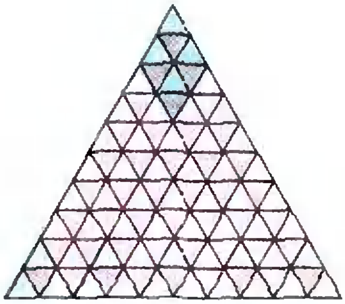


Рис. 17.

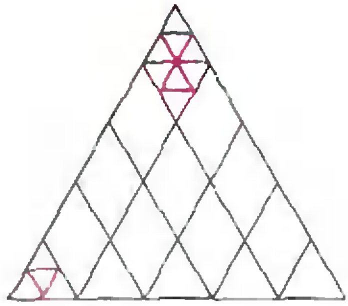


Рис. 18.

$+\vec{AD}=\vec{AB}$. В силу равенства числа синих и зеленых клеток каждой паре симметричных синих клеток C и D соответствует некоторая пара симметричных зеленых клеток K и L. Для них $\vec{BK}+\vec{BL}=\vec{BA}$, и, значит, $\vec{AC}+\vec{AD}+\vec{BK}+\vec{BL}=\vec{0}$. Таким образом, сумма всех векторов равна нулю.

8. Поставим в соответствие каждому человеку из компании точку на плоскости и соединим каждые две такие точки дугой, если соответствующие им люди знакомы. Получим граф, вершины которого — люди из компании, а ребра — знакомства между ними.

Предположим, что, вопреки утверждению задачи, любая вершина X соединена с любой из 16 остальных вершин либо ребром, либо через какую-нибудь третью вершину. Так как вершина X соединена ребрами ровно с четырьмя вершинами, каждая из которых соединена ребрами еще ровно с тремя вершинами, то больше в графе никаких вершин нет, и все упомянутые 17 вершин различны (рис. 16). При этом все остальные ребра графа (их количество равно $\frac{17\cdot 4}{2}-16=18$), могут соединять только крайние вершины (пунктирные ребра на рисунке 16). Каждое из этих 18 ребер задает цикл, состоящий из 5 ребер и проходящий через вершину X. В силу произвольности выбора вершины X графа через каждую из 16 остальных его вершин также проходит ровно по 18 таких циклов. Каждый цикл проходит через 5 вершин, поэтому общее число равно $\frac{18\cdot 17}{5}$, что невозможно. Таким образом, утверждение задачи доказано.

11 класс

1. Применяя формулу

$$\cos(x+d)=\cos d\cos x-\sin d\sin x$$

при $d=1, 2, 3$, получаем равенства

$$f(x)=A\cos x+B\sin x=C\cos(x+\varphi)$$

для некоторых констант A, B, C и φ. Поскольку расстояние между соседними нулями функции $\cos(x+\varphi)$ равно π, условие задачи может выполняться только в случае $C=0$. Таким образом, нули функции $f(x)$ заполняют всю прямую, т. е. $f(x)\equiv 0$.

2. Решение этой задачи (задача М1373) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

3. *Решение этой задачи (задача М1372) будет* опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

4. Решение этой задачи (задача М1374) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

5. б) Это возможно при любом нечетном m, удовлетворяющем неравенствам $5\leqslant m\leqslant 25$ (стало быть, в пункте а) ответ отрицательный). Действительно, если треугольник замощен плитками, раскрасим его в два цвета в шахматном порядке (рис. 17) и обозначим через x число плиток первого вида, покрывающих по 3 белых треугольничка. Тогда число белых треугольничков равно

$$3x+1\cdot(m-x)+2\cdot(25-m)=55,$$

поэтому $2m\geqslant 2x=5+m$, откуда и следуют необходимые ограничения на m.

При любом из указанных значений m устроим замощение следующим образом: сначала разобьем исходный треугольник на 5 плиток первого вида и 10 ромбов со стороной 2 (например, как показано на рисунке 18), затем любые $\frac{m-5}{2}$ ромбов разобьем на плитки первого вида, а остальные ромбы — на плитки второго вида.

6. Пусть сумма всех 1992-х векторов равна $\vec{a}$. Введем на плоскости декартову систему координат так, чтобы ось Ox была сонаправлена с вектором $\vec{a}$ (если $\vec{a}=\vec{0}$, то ось Ox выбираем произвольным образом). Начинающий каждым своим ходом может выбирать из оставшихся к этому моменту векторов тот вектор, который имеет наибольшую абсциссу. Тогда в конце у него сумма векторов будет иметь не меньшую абсциссу, чем у противника, причем и по абсолютной величине у него абсцисса будет не меньше, а ордината — такая же, как у противника (ибо сумма всех абсцисс неотрицательна, а сумма всех ординат равна 0). Следовательно, начинающий при такой игре заведомо не проиграет.

7. Из условий задачи следуют соотношения

$$(n+k)^2-(m+l)^2=(n-k)^2-(m-l)^2=$$
$$=((n-k)+(m-l))((n-m)+(l-k))>0,$$

откуда получаем

$$(n-k)^2>(n+k)^2-(m+l)^2=$$
$$=((n+k)-(m+l))(k+l+m+n)\geqslant$$
$$\geqslant(k+(k+1)+(k+2)+(k+3))=4k+6.$$

Но квадрат целого числа не может при делении на 4 давать остаток 3, поэтому

$$(n-k)^2\geqslant 4k+8,$$

что и требовалось доказать.

8. См. решение задачи 8 для 10 класса.

[redacted]государственная олимпиада [redacted]нформатике

I тур. Основная идея алгоритма заключается в последовательном анализе элементов (0, 1)-матрицы и раскрашивании изолированных 0-областей. В случае появления элемента, общего для нескольких ранее найденных изолированных 0-областей, происходит их слияние.

Наилучший порядок обхода заданной (0, 1)-матрицы — по строкам, начиная с первой, и слева направо внутри каждой строки. Если рассматриваемый элемент матрицы равен 1, то осуществляется сразу переход к следующему элементу. В противном случае происходит анализ на принадлежность рассматриваемого элемента какой-либо уже существующей изолированной 0-области, элементы каждой из которых помечены порядковым номером этой области. При этом возможны следующие варианты. Если все соседи (на рисунке 19 они не заштрихованы) равны 1, то образуется новая изолированная 0-область, и рассматриваемому элементу присваивается новый порядковый номер этой области. Если среди соседей оказываются элементы различных 0-областей, то происходит их слияние. Если рассматриваемый элемент является соседним только для одной существующей изолированной 0-области, то он принимает значение, соответствующее элементам этой области.

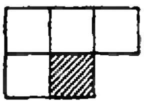


Рис. 19.

При решении данной задачи полезно доопределить исходную (0, 1)-матрицу граничными элементами слева, сверху и справа, присвоив им значение 1. Более того, возможна рекурсивная и нерекурсивная реализация предложенного алгоритма.

II тур. Предложенная задача относится к классу NP-полных задач, из чего следует, что оптимальное решение можно найти только полным перебором всех вариантов. В формальной постановке данная задача может быть определена следующим образом. Рассмотрим направленный граф, вершинам которого соответствуют номера жителей острова или президентов партий, а дуги в нем определяют связь президента со своими членами партии. Необходимо определить минимальное число вершин, объединение которых со связанными с ним вершинами образует множество вершин графа. На начальном этапе всегда полезно выделить в исходном графе несвязанные подграфы, а затем, если число вершин в каждом подграфе невелико, например не более 10, применить полный перебор. Наряду с полным перебором для решения такого рода задач могут быть использованы эвристические методы, во многих случаях дающие искомое решение. Среди них можно выделить так называемый «жадный» алгоритм, суть которого заключается в следующем:

— выбирается вершина с максимальной степенью и формируется список партий, которые с ней связаны;

— из графа вычеркиваются дуги, входящие в эту вершину, и дуги, выходящие из нее;

— процесс повторяется до тех пор, пока в списке не окажутся представители всех партий.

Легко видеть, что описанный алгоритм не всегда дает оптимальное решение. Его можно улучшить, если на каждом шаге выбирать не по одному представителю, а по два, учитывая сразу все партии, которые они представляют. Можно также делать неполный перебор, выбирая на текущем шаге одну из двух или трех вершин с наибольшими степенями входа.

Следует отметить, что какой бы алгоритм ни предлагался для решения данной задачи, выполнение его на компьютере должно быть закончено в течение отведенного для тестирования времени. Искусственное введение в программу ограничения по времени не является корректным, так как выбор требуемой эвристики в программе должен осуществляться алгоритмически, без вмешательства пользователя. В этом и должно заключаться умение участников анализировать размерность задачи и ставить ей в соответствие алгоритм, дающий оптимальное решение.

В заключение приведем один из тестов, который использовался для проверки этой задачи на олимпиаде.

Входные данные: 1—8,9; 2—10,11; 3—12,13; 4—8,9,10; 5—11,12,13; 6—8,9,10,11; 7—9,10, 11,12,13; 8—1,4,6; 9—1,4,6,7; 10—2,4,6,7; 11—2,5,6,7; 12—3,5,7; 13—3,5,7; 14—8; 15—9; 16—10; 17—11; 18—12; 19—13; 20—21,22, 23; 21—20; 22—20; 23—20.

Оптимальное решение: 8,9,10,11,12,13,20.

[redacted]нт» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Ответ: 8. Самый левый конь отстоит от самого правого на два хода, как и самый верхний от самого нижнего. Отсюда следует, что все кони находятся в квадрате 5×5 клеток, и их не больше восьми (см. рис. 20).

2. $425^2=180625$.

3. Проведем прямую параллельно одной из заданных прямых на расстоянии вдвое меньшем расстояния от этой прямой до точки M. Через точку ее пересечения со второй из заданных прямых и точку M проведем еще одну прямую. Точка ее пересечения с первой из заданных прямых и будет, очевидно, искомой. Вторая точка получается, если поменять ролями первую и вторую прямые (см. рис. 21).

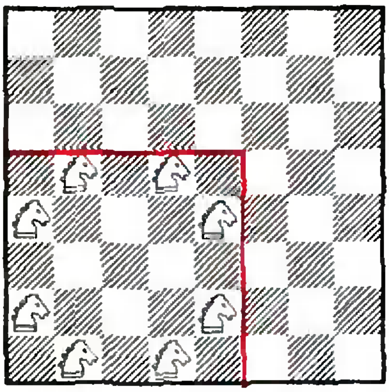


Рис. 20.

4. В комнате 6 честных людей.

5. Последовательность строится по следующему принципу: каждое число, начиная со второго, сообщает, сколько каких цифр находится в предыдущем числе. Так, второе число — 11 — следует читать так: «одна единица», следующее число — 21 — «две единицы», идущее далее число 1112 читается как «одна единица и одна двойка» и т. д.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 10)

Вопросы и задачи

1. Нет, поскольку в присутствии других проводников их емкости могут изменяться.

2. Нельзя, так как на изолированной обкладке вследствие индукции возникнут заряды обоих знаков, и банка не будет конденсатором.

3. По порядку величины электрическая емкость тела человека такая же, как емкость шара диаметром 1 м. Она составляет примерно 50 пФ.

4. Не изменится.

5. $C_{общ}=C$. Конденсатор емкостью C_0 подсоединен к точкам, разность потенциалов между которыми равна нулю.

6. Каждая из пластин обладает определенной, обычно небольшой, емкостью относительно земли. При заземлении пластины нейтрализуется часть находящегося на ней заряда. Поэтому конденсатор будет разряжаться. Но разряжаться он будет тем медленнее, чем больше его емкость по сравнению с емкостью пластин относительно земли.

7. В первом случае на большой сфере заряды будут располагаться только с внутренней стороны. Во втором случае они будут находиться с обеих сторон, и емкость всего конденсатора будет равна емкости системы двух параллельно соединенных конденсаторов с обкладками AB и BC (рис. 22).

8. Нужно сближать или разводить пластины конденсатора.

9. Ток самоиндукции, возникающий при размыкании цепи, заряжает конденсатор и не проходит в виде искры через рубильник.

10. Если катушка включена в замкнутую цепь, то в ней возникнет постоянный ток, время установления которого определяется индуктивностью катушки и ее сопротивлением.

11. После того как на первую катушку намотали вторую, активное сопротивление стало вдвое меньше, а индуктивное осталось прежним. Следовательно, общее сопротивление уменьшится менее чем в два раза, т. е. будет больше 10 Ом.

12. Обмотка трансформатора сгорит, так как у нее велико только индуктивное сопротивление, активное же — ничтожно мало.

13. При удалении верхней части сердечника индуктивности первичной и вторичной катушек уменьшатся. Это приведет к уменьшению ЭДС самоиндукции в первичной обмотке и ЭДС индукции во вторичной. Следовательно, ток в первичной катушке увеличится, а во вторичной *уменьшится.*

14. а) В медном сердечнике возникнут индукционные токи Фуко, магнитное поле которых будет ослаблять магнитное поле катушки. Это приведет к уменьшению ее индуктивности и, следовательно, к увеличению частоты колебаний. б) Сердечник из феррита увеличит магнитное поле катушки, соответственно возрастет индуктивность катушки, а частота — уменьшится.

15. Изменятся амплитуды колебаний силы тока, напряжения, магнитной индукции; сохранится период колебаний.

16. *В системе возникнут незатухающие (если* пренебречь излучением электромагнитных волн) колебания. При этом в момент, когда заряд распределен поровну между конденсаторами, энергия электростатического поля минимальна, а энергия магнитного поля максимальна.

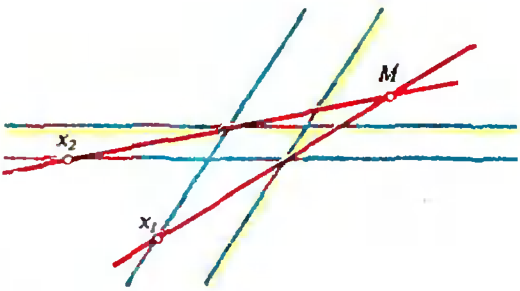


Рис. 21.

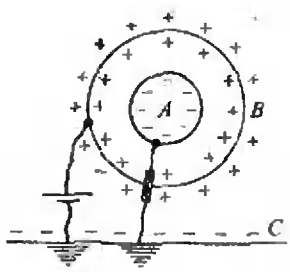


Рис. 22.

17. Когда заряд на пластинах конденсатора достигнет своего максимального значения, пластины следует раздвинуть, при этом совершенная работа пойдет на увеличение энергии контура. Когда заряд будет равен нулю, пластины следует сдвинуть до прежнего положения — энергия в контуре не изменится.
18. Да, может.
19. В ветвь A нужно включить катушку индуктивности, а в ветвь B — конденсатор.
20. Если пренебречь активным сопротивлением, то $U=I(\omega L-1/(\omega C))$. Напряжение не зависит от тока только тогда, когда $\omega L=1/(\omega C)$; в таком случае $U=0$ при любом I.
Микроопыт
Следует увеличивать либо емкость, либо индуктивность.

[redacted]ел последовательности

(см. «Квант» № 10)

1. 1. 2. 0. 3. -1. 4. $-1/2$. 5. -1. 6. $a^2+a+1/3$.
Указание.
$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2=na^2+2a\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^2}=$$
$$=na^2+2a(n-1)+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}.$$
Мы воспользовались формулой для суммы квадратов:
$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
7. 1/3. Указание. Пусть $a_k=k(k+1)$, $b_k=k(k+1)(k+2)/3$. Заметим, что $b_k-b_{k-1}=a_k$. Это дает возможность вычислить сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1-b_0+b_2-b_1+\ldots+b_n-b_{n-1}=b_n=n(n+1)(n+2)/3$.
8. 0. Указание. $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=2/(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$.
9. 1. 10. 1/2. 11. 0. Указание. Пусть $u=n^2$. Имеем
$$u^{2/3}-(u-1)^{2/3}=(u^{1/3}-(u-1)^{1/3})(u^{1/3}+(u-1)^{1/3})=(u^{1/3}+(u-1)^{1/3})/(u^{2/3}+u^{1/3}(u-1)^{1/3}+(u-1)^{2/3}).$$
В знаменателе — более высокая степень u, чем в числителе, а $u\to\infty$.

[redacted]сления в тригонометрии

(см. «Квант» № 10)

1. 2. 2. 4. 3. $2\sqrt3$. 4. $2\sqrt3$. 5. -1. 6. 1. 7. -1. 8. 1. 9. 1/64. 10. $(\sqrt6-\sqrt2)/4$. 11. 1/4. 12. $\sqrt3$. 13. 3. 14. 1/16. 15. 1/2. 16. 1. 17. 8. 18. 4. 19. 1/2. 20. 3/2. 21. 3/16. 22. 1/4. 23. 1. 24. 1. 25. 0. 26. 1. 27. 1/32. 28. 1/32. 29. 48. 30. 3/356. 31. 1/27. 32. 1. 33. $\sqrt3$. 34. $\sqrt2-\sqrt2/2$. 35. $(\sqrt6-\sqrt2)/4$. 36. 2. 37. 42. 38. $\sqrt3$. 39. $(3-\sqrt3)/3$. 40. 0. 41. 9. 42. $\sqrt{2}/8$. 43. -1. 44. $4\sqrt3/3$. 45. 1/8. 46. $\sqrt3(\sqrt{10+2\sqrt5}-\sqrt5+1)/8$. 47. $\sqrt7$.

[redacted]чи XXXII Всеукраинской [redacted]матической олимпиады

(см. «Квант» № 10)

8 класс

1. Из равенства $2m=n^2+1$ следует, что n нечетно. Пусть $n=2k+1$, тогда $2m=2(k^2+(k+1)^2)$.
2. Пусть OH_1 — высота треугольника AOB, OH_2 — высота треугольника COD. Поскольку OH_1 и OH_2 также являются биссектрисами, из условия $\angle AOB+\angle COD=180^\circ$ получаем равенства $\angle BOH_1=\angle OCH_2$, $\angle COH_2=\angle OBH_2$. Отсюда следует, что треугольники OCH_2 и OBH_1 равны, и $OH_1=1/2\,CD$, $OH_2=1/2\,AB$. Остальное ясно.
3. Одновременно можно увидеть или только одну грань (6 способов), или две смежные грани с общим ребром (12 способов), или 3 грани с общей вершиной (8 способов). Всего получим 26 сумм. Числа на гранях можно взять так, чтобы все эти суммы были различными (например, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5).
4. а) $c=p(0)$ — целое число. б) Нет. Например, многочлен $p(x)=x(x+1)/2$ принимает целые значения для любых целых x.
5. Если отрезки AB и CD пересекаются, то четырехугольник $ABCD$ — выпуклый. Хотя бы один из его углов не меньше 90° (возможно, равен 180°). Пусть это угол C, но тогда в треугольнике $AB>CB$, что противоречит условию.
6. Поскольку $(a+b)/c\geqslant2$, $(c+b)/a\leqslant2$, $(a+c)/b\geqslant1$, $a-b\geqslant0$, $c-b\leqslant0$, $a-c\geqslant0$, получаем $(a^2-b^2)/c\geqslant2(a-b)$, $(c^2-b^2)/a\geqslant2(c-b)$, $(a^2-c^2)/b\geqslant(a-c)$. Осталось сложить эти три неравенства.

9 класс

1. Пусть разность прогрессии равна d, а сумма $a_{19}+a_{92}=b$. Нужно выяснить, при каких b система
$$\frac{a_1+a_1+(k-1)d}{2}k=1992,$$
$$a_1+18d+a_1+91d=b$$
относительно неизвестных a_1 и d имеет решение. Исключая a_1, получим $(110-k)d=b-(1992\cdot2)/k$. При $k\neq110$ система имеет решение при любых b. При $k=110$ получаем $b=1992\cdot2/110$.
2. Поставим на двух противоположных гранях числа 1 и 2. Обходя оставшиеся 4 грани, поставим по очереди числа 3, 9, 6, 18. Легко проверить, что тогда все 26 возможных сумм (см. задачу 3 для 8 класса) будут различны. При этом наибольшая из них равна 26 — это и есть искомое значение.
3. Пусть m — целый корень многочлена $f(x)$, а k — остаток от деления m на 1992.

Поскольку k^l-m^l делится на $k-m$, $f(k)-f(m)=$ $=f(k)$ будет делиться на $k-m$, а значит, и на 1992.

4. Опустим перпендикуляр из центра круга O на сторону BC. Его основанием будет точка M — середина BC. Геометрическим местом точек M будет круг с диаметром OD. Искомое геометрическое место получаем из этого круга гомотетией с центром A и коэффициентом 2/3.

5. Выиграет начинающий. Разобьем всю доску на прямоугольники 1×2, оставив при этом одну отдельную клетку. Первый ход необходимо сделать в эту отдельную клетку. Когда второй ставит шашку в какой-то из прямоугольников 1×2, первый своим следующим ходом должен поставить шашку во вторую клетку этого прямоугольника.

6. Если $2p+1=m^n$, то m — нечетно, т. е. $m=2k+1$. Отсюда $2p=2k\cdot A$, где $A>1$. Поскольку p — простое, $k=1$ и $m=3$. Перебирая все n, для которых $3^n<2001$, находим единственное решение: $p=13$.

7. Докажем, что любой центрально-симметричный выпуклый многоугольник $A_1A_2...A_{2n}$ можно разрезать на параллелограммы. От каждой из точек A_3, A_4, ..., A_n отложим вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ (равный $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$) и «отрежем» от многоугольника образованные таким образом $(n-1)$ параллелограммов. Мы получим $(2n-2)$-угольник. Если центр симметрии $A_1A_2...A_{2n}$ лежал в точке O, то полученный многоугольник будет центрально-симметричным с центром в точке O_1, такой, что $\overrightarrow{OO_1}=$ $=1/2\ \overrightarrow{A_1A_2}$. Продолжаем такую операцию, пока не придем к центрально-симметричному четырехугольнику, т. е. параллелограмму.

8. Пусть k — рациональное число. Прямая $y-12=k(x-42)$ проходит через точку A и пересекает окружность в точке $B(x_0;\ y_0)$, причем $x_0^2+2x_0+(k(x_0-42)+12)^2=1992$. Это квадратное уравнение, один из корней которого $x_0=42$ — рационален, рациональным будет и второй корень. Число $y_0=k(x_0-42)+12$ при этом также будет рациональным. Остается заметить, что через точку A можно провести бесконечно много прямых с рациональным k.

10 класс

2. Пусть a, b, c — длины сторон BC, CA, AB. Используя то, что биссектриса делит противоположную сторону в отношении, равном отношению длин прилегающих сторон, выразим $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ и из равенства $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$ получим, что $\vec{0}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BC}\,(c/(c+b)$ $-b/(b+a))+\overrightarrow{CA}\,(a/(a+c)-b/(b+a))$.

Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ не коллинеарны, поэтому $c/(c+b)-b/(b+a)=0$, $a/(a+c)-b/(b+a)=0$. Отсюда $a=b=c$.

3. Поскольку $y^2+y+1>0$, из третьего уравнения получим $xz<0$. Поэтому x и z имеют разные знаки. Но из первого уравнения следует $0>4yz+2z=2z(2y+1)$, а из второго — $0>2xy+x=x(2y+1)$. Поэтому x и y должны быть одного знака. Противоречие.

4. Заметим, что все положительные числа отмечены. Пусть a_k — отмеченное число с наименьшим номером k и $a_k+a_{k+1}+...+a_m>0$. Тогда положительной будет и сумма всех отмеченных чисел между a_k и a_m (из левой части неравенства мы убираем некоторые отрицательные числа). Далее рассматриваем отмеченное число с наименьшим номером после a_m, и т. д.

5. **О т в е т:** $n=3$.

6. Легко видеть, что в многоугольнике F найдутся вершины C и D такие, что отрезки A_1C и A_1D будут сторонами F_1. При этом треугольники A_1BC и A_1BD будут содержать часть F_1, лежащую вне F. Из $AB=BA_1$ следуют равенства площадей $S_{ABC}=S_{A_1BC}$, $S_{ABD}=$ $=S_{A_1BD}$. Осталось использовать то, что $S_{ABC}+S_{ABD}$ меньше площади F.

7. Достаточно доказать, что каждое слагаемое в левой части не больше $2\dfrac{a+c}{b+d}$. Например, $\dfrac{a+b}{b+c}\leqslant2\dfrac{a+c}{b+d}$ приводим к виду $(a+b)(b+d)\leqslant$ $\leqslant2(a+c)(b+d)$, и после преобразований приходим к неравенству

$$a(2c-d)+b(2c-d)+(2c^2-b(b-a))\geqslant0. \quad (*)$$

Поскольку a, b, c, d лежат в промежутке [1, 2], $2c\geqslant d$, $2c^2\geqslant2\geqslant b(b-a)$, так что неравенство (*) выполняется.

8. Для положенной фигурки отметим все клетки доски, имеющие с клетками фигурки общую сторону (их будет 8). Тогда если центральная клетка другой фигурки не падает на отмеченную клетку, эта фигурка наверняка не будет перекрываться с первой. Таким образом, каждая положенная четырехклеточная фигурка «запрещает» $8+4=12$ клеток. Центральная клетка фигурки не может находиться в 4 угловых клетках доски. Поскольку $100^2-4-12\cdot800>0$, к нашим 800 фигуркам можно добавить еще хотя бы одну (даже 32) фигурки.

11 класс

1. **О т в е т:** существует. Возьмем в плоскости 995 пар перпендикулярных векторов и еще один вектор, перпендикулярный этой плоскости.

2. Если $AK=x\cdot AB$, то $S_{KLM}=(S_{ABC}-S_{AKM}-$ $-S_{BKL})/2=S(1-x^2-(1-x)^2)=S(x-x^2)$. Максимум достигается при $x=1/2$ и равен $S/4$.

3. Пусть a — наименьшее число среди записанных, а b и c — числа, соседние с ним ($b\geqslant a$, $c\geqslant a$). Если $a=\sqrt{bc}$ или $a=(b+c)/2$, то $a=b$ и $a=c$. Продолжая эти рассуждения для чисел, соседних с b и c, и т. д., получим, что все числа равны между собой и равны 26.

4. Обозначим $\alpha=\operatorname{arctg}4/3$. Если $\alpha/\pi=m/n$, то αn будет кратно π, и среди чисел вида $\operatorname{tg}k\alpha$, $k\in N$, будет конечное число различных. Отметим теперь, что $\operatorname{tg}\alpha=4/3$, и если $\operatorname{tg}\beta=p/q$ — несократимая дробь с четным

числителем, то $\operatorname{tg} 2\beta = 2pq/(q-p)(q+p)$ — также несократимая дробь с четным (но уже бо́льшим) числителем. Поэтому в последовательности $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, $\operatorname{tg} 8\alpha$, ... все члены будут различны. Противоречие.

5. Сложите очевидные неравенства $\frac{a^2}{a-b} \geqslant a+b$, $\frac{b^2}{b-c} \geqslant b+c$ и учтите, что хотя бы одно из них — строгое.

6. Используя то, что высота делит противоположную сторону в отношении, равном отношению котангенсов двух прилежащих углов треугольника выразим $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$. Из $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$ получим $\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} =$

$$= \overrightarrow{BC}\left(\frac{\operatorname{ctg}\angle C}{\operatorname{ctg}\angle C + \operatorname{ctg}\angle B} - \frac{\operatorname{ctg}\angle B}{\operatorname{ctg}\angle B + \operatorname{ctg}\angle A}\right) +$$

$$+ \overrightarrow{CA}\left(\frac{\operatorname{ctg}\angle A}{\operatorname{ctg}\angle A + \operatorname{ctg}\angle C} - \frac{\operatorname{ctg}\angle B}{\operatorname{ctg}\angle B + \operatorname{ctg}\angle A}\right).$$

Из того, что $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ не коллинеарны, следует, что коэффициенты при каждом из векторов равны нулю. Отсюда $\operatorname{ctg}\angle B = \operatorname{ctg}\angle A = \operatorname{ctg}\angle C$, и углы треугольника равны.

7. Легко видеть, что CB перпендикулярен плоскости (SAB), и поэтому $(SBC) \perp (SAB)$. По условию $SC \perp (AB_1C_1D_1)$, и поэтому $(SBC) \perp (AB_1C_1D_1)$. Если две плоскости перпендикулярны третьей, то их линия пересечения также перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $(AB_1) \perp (SBC)$, и $\angle C_1B_1A = 90°$. Аналогично, $\angle C_1D_1A = 90°$. Значит O_1 (середина AC_1) — центр окружности, описанной вокруг $AB_1C_1D_1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Тогда O — середина AC, и $OO_1 \parallel SC$. Отсюда $OO_1 \perp (AB_1C_1D_1)$, и $OA = OB_1 = OC_1 = OD_1$. Поэтому O — центр сферы, описанной вокруг нашего многогранника.

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин, Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
А. Астрин, Н. Кузьмина, Т. Макарова, В. Назаров, А. Хоменко, П. Чернуский

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 31.08.92. Подписано к печати 20.10.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт 27,09. Уч.-изд. л. 7,99.
Тираж 80834 экз. Заказ 1105. Цена 1 р. 10 к.

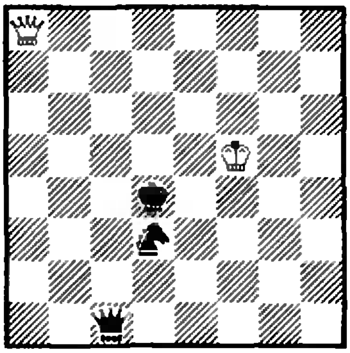
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

[redacted]

Шахматная страничка

ФИЛИГРАННЫЙ АНАЛИЗ КОМПЬЮТЕРА

Двадцать лет назад, на международном турнире на Кубе, состоялась одна довольно любопытная партия. Белыми в ней играл венгерский гроссмейстер Л. Лендьел, а черными — международный мастер из Англии Д. Леви, один из крупнейших в мире специалистов в области компьютерных шахмат. Игра свелась к редкому эндшпилю, в котором ферзь с конем Леви боролись против ферзя Лендьела. Хотя Леви удалось взять верх в этом теоретически ничейном эндшпиле (впрочем, исключений сколько угодно), осталось еще много загадок и вопросов: закономерен ли результат партии, наилучшим ли образом действовали соперники и т. д. И только в 1991 году программа К. Томпсона, специально разработанная для эндшпиля «король, ферзь и конь против короля и ферзя», расставила все точки над «i».



Вот этот редкий в шахматной практике эндшпиль. Спустя 15 ходов черным удалось заматовать неприятельского короля. Посмотрите финал этого поединка.

66...Фf4+ 67. Kpe6 Фh6+ 68. Kpd7 Фg7+ 69. Kpc8 Фf8+ 70. Kpb7 Kc5+ 71. Kpa7 Фe7+ 72. Kpb6 Kd7+ 73. Kpc7 Ke5+ 74. Kpb8 Фd8+ 75. Kpb7 Фd7+ 76. Kpb6 Kc4+ 77. Kpa6 Фd6+ 78. Kpb7 Фd7+ 79. Kpb8 Фd8+ 80. Kpb7 Kd6+ 81. Kpa7 Фa5+ 82. Kpb8 Фb6+. Белые сдались (**83. Фb7 Ф:b7×**).

Насколько точно действовали соперники? Этот эндшпиль был проверен на компьютере, и программа Томпсона установила, что игра обоих партнеров была слишком далека от идеальной, причем Леви пару раз упустил победу, а Лендьел в свою очередь — ничью. Всезнающая машина установила, что в позиции на диаграмме при наилучшей игре обеих сторон черные выигрывают в 14 ходов — дают мат или берут ферзя. Приведем теперь это же окончание, но как бы прокомментированное компьютером.

66...Фf4+ (13). В скобках мы указываем, сколько ходов остается до мата или выигрыша ферзя. Первый ход черных — правильный.

67. Kpe6 (12) **Фh6+??** Упускает победу, к цели вело 67...Kc5+.

68. Kpd7?? (8) А теперь белые теряют дорогу к ничьей — 68. Kpe7 — и вместо этого переходят к позиции, выигрышной для черных в восемь ходов.

68...Фg7+?? Опять упускают победу, и опять решало 68...Kc5+.

69. Kpc8?? (5) Вместо ничьей 69. Kpe6 белые переходят к позиции, где черные могли выиграть всего в пять ходов.

69...Фf8+? (11) Большая потеря времени, правильно было 69...Фg8+.

70. Kpb7 (10) **Kc5+** (10) **71. Kpa7** (9) **Фe7+?** (16). Как видим, этот шах «отбрасывает» черных на семь ходов, следовало продолжать 71...Фf7+.

72. Kpb6 (15) **Kd7+** (15) **73. Kpc7?** (13). На ход упорнее 73. Kpb7.

73...Ke5+ (13) **74. Kpb8** (12) **Фd8+?** (13). Еще одна неточность, правильно 74...Фe8+.

75. Kpb7 (12) **Фd7+** (12) **76. Kpb6?** (8). Вместо 76. Kpa6 белый король отступает не на то поле, «возвращая» противнику три хода.

76...Kc4+ (8) **77. Kpa6** (7) **Фd6+** (7) **78. Kpb7** (6) **Фd7+?** (8). На два хода быстрее решал шах с b4 или b6.

79. Kpb8? (4). На три хода упорнее 79. Kpa6.

79...Фd8+ (4) **80. Kpb7** (3) **Kd6+** (3) **81. Kpa7** (2) **Фa5+** (2) **82. Kpb8** (1) **Фb6+** (1) **83. Фb7** (0) **Ф:b7×** (0). Выигрыш в 0 ходов, поскольку белый король заматован.

Итак, из 17 ходов черных и 16 белых только 11 были оптимальными, причем дважды черные упустили выигрыш, а белые не воспользовались этим. Да, разница между машиной и человеком в разыгрывании этого эндшпиля довольно велика...

А как должны были развиваться события, если бы обе стороны действовали оптимальным обрвзом? Вот цепочка ходов, указанная компьютером.

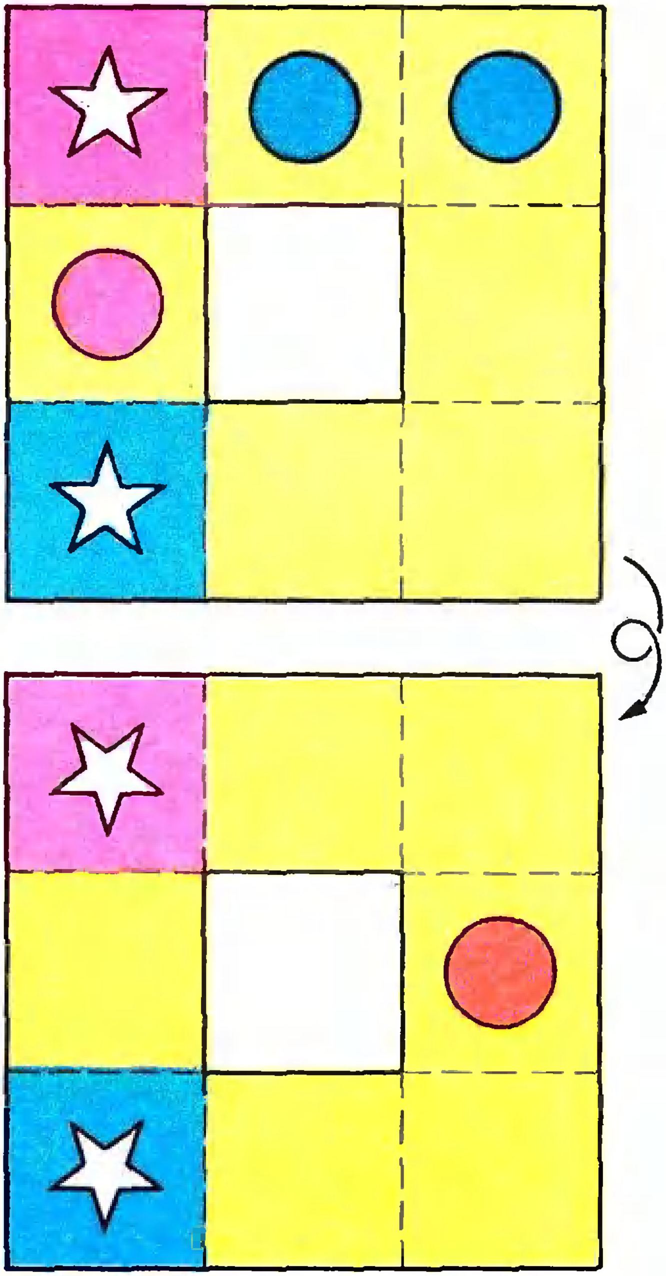
66...Фf4+ 67. Kpe6 Kc5+ 68. Kpe7 Фh4+ 69. Kpf7 Фh7+ 70. Kpf6 Ke4+ 71. Kpe6 Фg6+ 72. Kpe7 Фf6+ 73. Kpd7 Фf7+ 74. Kpc8 Фg8+ 75. Kpb7 Kc5+ 76. Kpa7 Фa2+ 77. Kpb8 Фh2+ 78. Kpa7 (78. Kpc8 Фh8+ 79. Kpc7 Ф:a8) **78...Фc7+ 79. Фb7 Ф:b7×.**

Понятно, что за доской, тем более при недостатке времени, ошибиться нетрудно, так что игру Лендьела и Леви не стоит сильно критиковать. Но интересно, что в фундаментальной «Энциклопедии шахматных окончаний», недавно изданной в Югославии, этот эндшпиль также приведен с несколькими неточностями:

66...Фf4+ 67. Kpe6 (после 67. Kpg6 Ke5+ 68. Kpg7 Фf7+ белые мгновенно получают мат) **67...Kc5+ 68. Kpe7 Фh4+ 69. Kpf7 Фh7+ 70. Kpf6 Ke4+ 71. Kpe6 Фg6+ 72. Kpd7?** (точнее 72. Kpe7, затягивая сопротивление на один ход) **Фf7+ 73. Kpc8 Kd6+?** (правильно 73...Фg8+, выигрывая не в 8 ходов, а в 6) **74. Kpb8 Фe8+ 75. Kpa7 Kb5+ 76. Kpb7 Фe4+?** (точнее 76...Фe7+, выигрывая не в 7 ходов, а в 5) **77. Kpb8 Фe5+ 78. Kpb7 Фd5+?** (точнее 78...Фe7+, также экономя ход — выигрыш не в 6 ходов, а в 5) **79. Kpb8 Фd8+ 80. Kpb7 Kd6+ 81. Kpa7 Фa5+ 82. Kpb8 Фb6+ 83. Фb7 Ф:b7×.**

Е. Гик

1 р. 10 к.
Индекс 70465



ФЛЕКСО—КВАДРАТ

Если к головоломкам применим эпитет «остроумная», то показанный на рисунке «флексо-квадрат» вполне его заслуживает.

Знатоки, посмотрев на эту головоломку (но не беря ее в руки), говорят, что она, наверное, очень простая. Попытавшись же решить ее, они через несколько минут заявляют, что она неразрешима. И только когда заверишь их, что головоломка имеет решение, они берутся за дело всерьез и довольно быстро справляются с задачей.

На рисунке показаны лицевая и оборотная стороны флексо-квадрата, а справа внизу — два варианта решения головоломки (в сложенном виде флексо-квадрат с обеих сторон должен быть или красным, или синим). Перерисуйте квадрат на бумагу, раскрасьте его с двух сторон в точном соответствии с рисунком, вырежьте сквозные отверстия (на рисунке они белые) и попробуйте решить.

Присылайте нам ваши варианты подобных флексо-головоломок.

А. К.

А 

Б